

Rechenmethoden der Physik

Dozent: Professor Dr. Olaf Lechtenfeld

Abschrift: Thorsten Sklarek

31. Januar 2014

Inhaltsverzeichnis

1	Vektoren	5
1.1	Richtung und Betrag	5
1.2	Skalarprodukt	9
1.3	Kreuzprodukt	12
1.4	Index-Schreibweise	15
2	Kinematik	17
2.1	Raumkurven	17
2.2	Differenzieren	19
2.3	Kettenregel und Gradient	23
3	Dynamik	25
3.1	Kraftfelder	25
3.2	Impuls und Drehimpuls	28
3.3	Energie und Potenzial	29
3.4	Eindimensionale Bewegung mit dem Energiesatz	31
3.5	Dreidimensionale Bewegung unter konservativer Zentralkraft	32
3.6	Keplerproblem	34
3.7	Systeme von Massepunkten	36
4	Tensoren	39
4.1	Drehungen und Matrizen	39
4.2	Tensor-Begriff	46
4.3	Hauptachsen-Transformation	49
4.4	Beispiele	51
5	Funktionen	53
5.1	Allgemeines	53
5.2	Die Exponentialfunktion	55
5.3	Potenzreihen	58
5.4	Komplexe Zahlen \mathbb{C}	62
6	Integrale	65
6.1	Gewöhnliche Integrale	65
6.2	Beispiele	68
6.3	Integrationsmethoden	70
6.4	Kurven-, Flächen-, Volumenintegral	73
6.5	Krummlinige Koordinaten	77

Inhaltsverzeichnis

6.6	Delta-Funktion	83
7	gewöhnliche Differenzialgleichungen	87
7.1	Terminologie	87
7.2	Zehn Fälle	89

1 Vektoren

1.1 Richtung und Betrag

Ortsvektor= Pfeil von Bezugspunkt zu einem interessierenden Punkt

Notation: \vec{r} , \vec{x} , \underline{r} , \mathbf{r}

Verschiebevektor= Pfeil, der Punkt(1) mit Punkt(2) verbindet

Notation: \vec{r}_{12} [Abb. 1.1]

Betrag= Länge eines Vektors

nicht negative Zahl, evtl. mit Einheit (Norm)

Notation: $|\vec{r}| = r$, $|\vec{v}| = v$

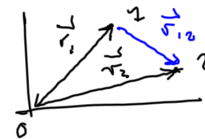





Abb. 1.1: Verschiebevektor

Vereinfachung: Pfeilklassen (vergesse Anfangspunkt)

-  Menge aller Pfeile gleicher Richtung & Betrags
-  Verschieben ändert nichts
-  Ausnahme: Ortsvektor

andere Situation: an jedem Raumpunkt ein Repräsentant eines anderen Vektors

Physiker: $\vec{V}(\vec{r}_1) \neq \vec{V}(\vec{r}_2)$, „Vektorfeld“ [Abb. 1.2]

Mathematiker: $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \text{Vektorraum}$, $p \mapsto \vec{v}(p)$

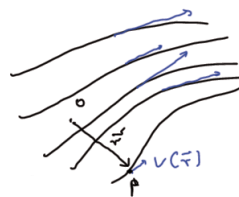


Abb. 1.2: Vektorfeld

3 Eigenschaften:

1. Multiplikation mit Zahl
2. Addition zweier Vektoren [Abb. 1.3]
3. Verhalten unter Drehungen



Abb. 1.3: Vektoraddition

1 Vektoren

zu 1.: Multiplikation mit Zahl [Abb. 1.4]
 Zahl \times Vektor = Vektor mit verändertem Betrag

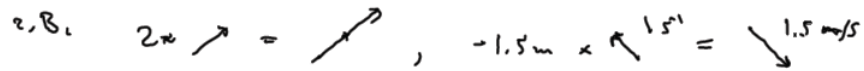


Abb. 1.4: ändern der Länge/Richtung eines Vektors

Notation: $(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$ „Gegenvektor“

Einheitsvektor = Vektor $\times \frac{1}{\text{Betrag}}$ hat Betrag = 1

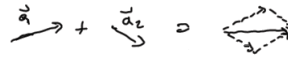
$\vec{e} = \frac{1}{a} \vec{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, so dass $|\vec{e}| = 1$ und $\vec{a} = a\vec{e}$

\exists einen Einheitsvektor für jede Richtung



zu 2.:

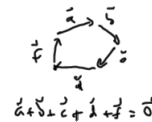
kommutativ $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = \vec{a}_2 + \vec{a}_1$



assoziativ $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

Nullvektor $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$ Notation: oft $\vec{0} = 0$

$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a} \forall \vec{a}$



1. Definition von Vektoren

Vektoren = Elemente eines Vektorraums V über den Körper \mathbb{R} , d.h. es gelten folgende Axiome

(1.1)

A) $\forall \vec{a}, \vec{b} \in V \exists$ Addition $\vec{a} + \vec{b} \in V$ mit

- 1) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ Assoziativität
- 2) $\exists \vec{0} : \vec{a} + \vec{0} = \vec{a} \forall \vec{a}$ Nullvektor
- 3) $\forall \vec{a} \exists (-\vec{a}) : \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ Gegenvektor
- 4) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ Kommutativität

B) $\forall \vec{a} \in V, \alpha \in \mathbb{R} \exists$ Skalarmultiplikation $\alpha \cdot \vec{a} = \vec{b} \in V$ mit

- 1) $(\alpha + \beta) \cdot \vec{a} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{a}, \alpha \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b}$ Distributivität
- 2) $\alpha \cdot (\beta \cdot \vec{a}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{a}$ Assoziativität
- 3) $\exists \mathbf{1} : \mathbf{1} \cdot \vec{a} = \vec{a} \forall \vec{a}$ Einselement

$(V, +)$ ist eine Kommutative Gruppe

alle Objekte, die diesen Axiomen genügen, sind Vektoren
 Betrag oder Richtung nicht erforderlich.

1.1 Richtung und Betrag

Komponenten Geometrie \rightarrow Algebra
zum Abmessen braucht es ein Bezugssystem

Der Vektor ist davon unabhängig!

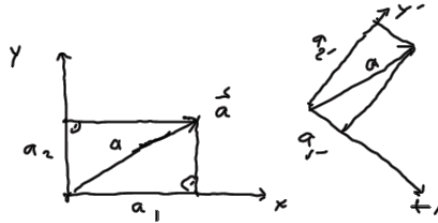
kartesisches Koordinatensystem $\vec{a} \doteq (a_1, a_2)$

Vektor \vec{a} hat in unserem K-System
die Komponenten a_1 & a_2 .

Notation für Ortsvektor: $\vec{r} \doteq (x, y)$

gegeben sind die Komponenten,

z.B. im \mathbb{R}^3 , $\vec{a} \doteq (a_1, a_2, a_3)$



- Betrag:

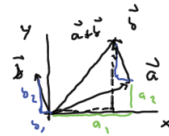
$$|\vec{a}| = a = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2} \quad (1.2)$$

- Vielfaches:

$$\lambda \vec{a} \doteq (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3) \quad (1.3)$$

- Summe:

$$\vec{a} + \vec{b} \doteq (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) \quad (1.4)$$



Basisvektoren Einheitsvektoren in Richtung der Koordinatenachsen:

$$\vec{e}_1 \doteq (1, 0, 0), \quad \vec{e}_2 \doteq (0, 1, 0), \quad \vec{e}_3 \doteq (0, 0, 1)$$

Rechtssystem



Zerlegung eines Vektors:

$$\vec{a} = \vec{e}_1 a_1 + \vec{e}_2 a_2 + \vec{e}_3 a_3 \quad (1.5)$$



Kollinearität:

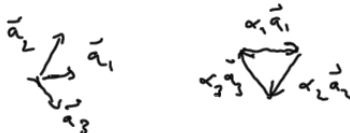
\vec{a}, \vec{b} sind kollinear, falls $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} = \vec{0}$

(d.h. entweder $\vec{a} \uparrow \vec{b}$ oder $\vec{a} \downarrow \vec{b}$)

Spezialfall von:

Lineare Abhängigkeit: $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$ sind linear unabhängig, falls

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{a}_i = \vec{0} \quad \text{impliziert, dass} \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

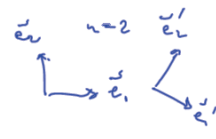


1 Vektoren

zu 3.: Verhalten der Komponenten unter passiven Drehungen erlaubt eine feinere Unterscheidung und eine engere ...

2. Definition von Vektoren:

Vektoren sind Elemente eines Vektorraums (Axiome (1.1)), deren Komponenten linear in $\{\cos \varphi_{jk}\}$ transformieren unter einer Koordinatendrehung


$$\begin{aligned} \{\vec{e}_i\} &\rightarrow \{\vec{e}'_j\} \text{ mit } \varphi_{ji} = \angle(\vec{e}'_j, \vec{e}_i) \quad i = 1, \dots, n \\ \vec{a} &\doteq (a_1, a_2) \curvearrowright \vec{a} = \vec{e}_1 a_1 + \vec{e}_2 a_2 \\ \vec{a} &\doteq (a'_1, a'_2) \curvearrowright \vec{a} = \vec{e}'_1 a'_1 + \vec{e}'_2 a'_2 \end{aligned}$$

dies unterscheidet Vektoren (im engeren Sinn) von

- Skalaren: transformieren nicht
- Tensoren: transformieren mit höheren Potenzen von $\{\cos \varphi_{ij}\}$
- Spinoren: transformieren linear in $\{\cos \frac{1}{2} \varphi_{ij}\}$

feinere Unterscheidung durch Betrachtung von Spiegelung am Ursprung:

$$\begin{aligned} \vec{v} &\mapsto -\vec{v} \text{ Vektor} \\ \vec{v} &\mapsto \vec{v} \text{ Pseudo-Vektor} \\ \alpha &\mapsto \alpha \text{ Skalar} \\ \alpha &\mapsto -\alpha \text{ Pseudo-Skalar} \end{aligned}$$

1.2 Skalarprodukt

$\vec{a} \cdot \vec{b}$ ist eine Zahl (Skalar)

soll linear sein in \vec{a}, \vec{b} , symmetrisch, ...

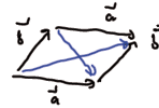
haben bereits Betrag (Norm) $|\vec{a}| = a$

Idee:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2$$

Parallelogramm-Gesetz:

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 + |\vec{a} - \vec{b}|^2 = 2a^2 + 2b^2$$



Skalarprodukt:

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2 = 4\vec{a} \cdot \vec{b}$$

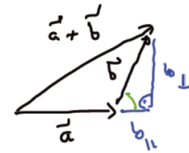
$$\begin{array}{l} \curvearrowright \vec{a} \cdot \vec{a} = a^2 \quad \checkmark \\ (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} \quad \checkmark \quad \text{Distributivgesetz} \\ (\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) = \lambda \vec{a} \cdot \vec{b} \quad \checkmark \quad \text{gemischtes Assoziativgesetz} \end{array}$$

geometrisch:

$$\begin{array}{l} (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{a} + \vec{b}|^2 \\ \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} \quad \text{Längenquadrat von } \vec{a} + \vec{b} \\ a^2 + b^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} \quad a^2 + b^2 + 2a \cdot b_{\parallel} \end{array}$$

Nebenrechnung:

$$\begin{aligned} |\vec{a} + \vec{b}|^2 &= (a + b_{\parallel})^2 + b_{\perp}^2 \\ &= a^2 + 2ab_{\parallel} + \underbrace{b_{\parallel}^2 + b_{\perp}^2}_{b^2} \\ &= a^2 + 2ab_{\parallel} + b^2 \end{aligned}$$



Vergleich:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab_{\parallel}$$

Trigonometrie:

$$\begin{array}{l} \vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \varphi \\ \text{wobei} \quad \varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b}) \end{array} \quad (1.6)$$

Nebenrechnung:

$$\frac{b_{\parallel}}{b} = \cos \varphi$$

1 Vektoren

auch richtig:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_{\parallel} b$$

Vorzeichen:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \quad \text{wenn Winkel stumpf}$$

Winkel:

$$\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{a \cdot b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\sqrt{\vec{a}\vec{a} \cdot \vec{b}\vec{b}}}$$

Orthogonal:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Kollinear:

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \pm ab$$

Projektion:

$$\vec{a} = \vec{e}_1 a_1 + \vec{e}_2 a_2 + \dots \Leftrightarrow a_i = \vec{a} \cdot \vec{e}_i \quad i = 1, 2, \dots$$

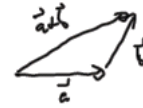
Anwendung in der Geometrie:

- Schwarzsche Ungleichung:

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq ab \quad (1.6)$$

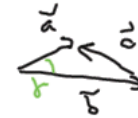
- Dreiecksungleichung:

$$|a - b| \leq |\vec{a} + \vec{b}| \leq a + b \quad (1.7)$$



- Kosinussatz:

$$\begin{aligned} \vec{c} &= \vec{a} - \vec{b} \\ \vec{c} \cdot \vec{c} &= (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2\vec{a}\vec{b} = a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi \end{aligned}$$

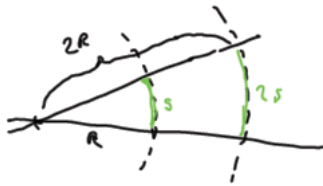


- Orthogonal-Zerlegung

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \vec{F}_{\parallel} + \vec{F}_{\perp} \text{ relativ zu einem } \vec{v} \\ \vec{v} \cdot \vec{F} &= v F_{\parallel} \Leftrightarrow F_{\parallel} = \frac{\vec{v}}{v} \cdot \vec{F} \quad \Leftrightarrow \vec{F}_{\parallel} = F_{\parallel} \frac{\vec{v}}{v} = \left(\vec{F} \cdot \frac{\vec{v}}{v} \right) \frac{\vec{v}}{v} \\ &\quad \Leftrightarrow \vec{F}_{\perp} = \vec{F} - \vec{F}_{\parallel} \end{aligned}$$

- Arbeit $A = \vec{F} \cdot \vec{s} \dots$ Kraft mal Weg

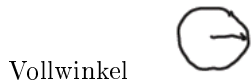
über Winkel



(a) $\varphi = \frac{s}{R}$ dim'los



(b) $s = R \cdot \varphi$

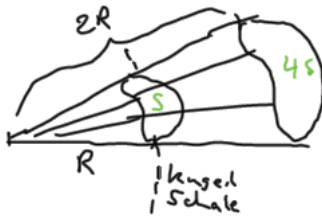


$\varphi = 2\pi$

rechter Winkel

$\varphi = \frac{\pi}{2}$

Raumwinkel: $\Omega = \frac{S}{R^2}$ Form der Fläche egal



Skalarprodukt in Komponenten:

Einheitsvektoren:

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = 1 \quad \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0 \quad \text{etc.}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (\vec{e}_1 a_1 + \vec{e}_2 a_2) \cdot (\vec{e}_1 b_1 + \vec{e}_2 b_2) \\ &= \vec{e}_1 a_1 \cdot \vec{e}_1 b_1 + \vec{e}_1 a_1 \cdot \vec{e}_2 b_2 + \vec{e}_2 a_2 \cdot \vec{e}_1 b_1 + \vec{e}_2 a_2 \cdot \vec{e}_2 b_2 \\ &= a_1 b_1 + 0 + 0 + a_2 b_2 \\ &= a_1 b_1 + a_2 b_2 \end{aligned}$$

in 3D:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \tag{1.8}$$

merke:

Komponenten sind basisabhängig, Skalarprodukt nicht

Spezialfall:

$$\vec{b} = \vec{a} \cap \vec{a}^2 = a^2 = (a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2$$

1 Vektoren

1.3 Kreuzprodukt

elektrisch geladene Teilchen, Geschwindigkeit \vec{v} , im Magnetfeld \vec{B} , spürt Kraft \vec{F}

experimentell: $\vec{F} \perp \vec{v}$, $\vec{F} \perp \vec{B}$, $F = \underbrace{q}_{\text{Ladung}} v \underbrace{B_{\perp}}_{\text{Anteil} \perp \vec{v}}$

($\underbrace{\vec{v}}_{\text{Daumen}}$, $\underbrace{\vec{B}}_{\text{Zeigefinger}}$, $\underbrace{\vec{F}}_{\text{Mittelfinger}}$) bilden ein Rechtssystem

dies definiert eindeutig das Kreuzprodukt

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B} \quad (1.10)$$

Betrag von \vec{F} ? berechne B_{\perp}

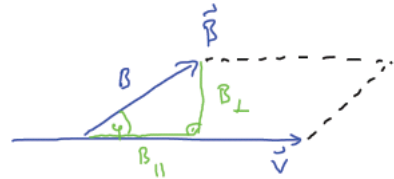
$$B_{\parallel} = B \cdot \cos \varphi \quad B_{\perp} = B \cdot \sin \varphi$$

$$\text{Test: } (B_{\parallel})^2 + (B_{\perp})^2 \stackrel{?}{=} B^2$$

also:

$$F = q v B \sin \varphi$$

$$= q \cdot (\text{Fläche des von } \vec{v} \text{ und } \vec{B} \text{ erzeugten Parallelogramms})$$



$$\left. \begin{array}{l} \vec{a} \times \vec{b} = \vec{e} a b \sin \angle(\vec{a}, \vec{b}) \\ \vec{e} \perp (\vec{a}, \vec{b}), (\vec{a}, \vec{b}, \vec{e}) \text{ Rechtssystem} \end{array} \right\} \quad (1.11)$$

merke: nur in 3 Dimensionen!

Eigenschaften:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \quad \text{antisymmetrisch}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{b}_{\perp} = \vec{a}_{\perp} \times \vec{b}$$

$$\vec{a} \times \vec{a} = 0$$

$$\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b})$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| = ab$$

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = 0$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0, \quad \vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$$

$$\underbrace{\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})}_{\text{in } (\vec{b}, \vec{c})\text{-Ebene}} \neq \underbrace{(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}}_{\text{in } (\vec{a}, \vec{b})\text{-Ebene}}$$

Entwicklungssatz:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad \text{“bac-cab“ Regel} \quad (1.12)$$

Beweis:

- wir wissen, daß $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \in (\vec{b}, \vec{c})$ -Ebene
- also: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}$ finde β, γ
- skalar multiplizieren mit \vec{a} : $0 = \lambda \vec{a} \cdot \vec{b} + \gamma \vec{a} \cdot \vec{c}$
- Lösung: $\beta = \lambda \vec{a} \cdot \vec{c}, \quad \gamma = -\lambda \vec{a} \cdot \vec{b}$ finde λ

$$\rightarrow \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \lambda \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \lambda \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

- Spezialfall: $\vec{a} = \vec{b} = \vec{e}_1, \quad \vec{c} = \vec{e}_2$

$$\underbrace{\vec{e}_1 \times (\vec{e}_1 \times \vec{e}_2)}_{\vec{e}_1 \times \vec{e}_3} = \lambda \underbrace{\vec{e}_1 (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2)}_0 - \lambda \underbrace{\vec{e}_2 (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2)}_{-\lambda \vec{e}_2}$$

$$\Leftrightarrow -\vec{e}_2 = -\lambda \vec{e}_2 \quad \curvearrowright \quad \lambda = 1 \quad \text{q.e.d.}$$

Jacobi-Identität

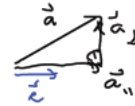
$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = 0 \quad (1.13)$$

Orthogonal-Zerlegung von \vec{a} in Richtung \vec{e} $\vec{e} \cdot \vec{e} = 1$

$$\vec{a} = \vec{a}_{\parallel} + \vec{a}_{\perp}$$

$$\vec{a}_{\parallel} = (\vec{a} \cdot \vec{e}) \vec{e}$$

$$\vec{a}_{\perp} = \vec{e} \times (\vec{a} \times \vec{e}) = \vec{a}(\vec{e} \cdot \vec{a}) - \vec{e}(\vec{e} \cdot \vec{a}) = \vec{a} - \vec{a}_{\parallel}$$



(1.14)

Kreuzprodukt in Komponenten:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (\vec{e}_1 a_1 + \vec{e}_2 a_2 + \vec{e}_3 a_3) \times (\vec{e}_1 b_1 + \vec{e}_2 b_2 + \vec{e}_3 b_3) \\ &= \cancel{\vec{e}_1 \times \vec{e}_1} a_1 b_1 + \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 a_1 b_2 + \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 a_1 b_3 \\ &\quad + \vec{e}_2 \times \vec{e}_1 a_2 b_1 + \cancel{\vec{e}_2 \times \vec{e}_2} a_2 b_2 + \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 a_2 b_3 \\ &\quad + \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 a_3 b_1 + \vec{e}_3 \times \vec{e}_2 a_3 b_2 + \cancel{\vec{e}_3 \times \vec{e}_3} a_3 b_3 \\ &= \vec{e}_1(a_2 b_3 - a_3 b_2) + \vec{e}_2(a_3 b_1 - a_1 b_3) + \vec{e}_3(a_1 b_2 - a_2 b_1) \end{aligned} \quad (1.15)$$

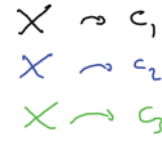
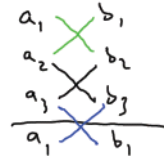
$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

1 Vektoren

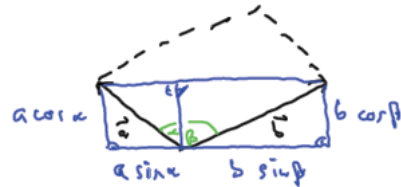
Tabelle: $\vec{e}_i \times \vec{e}_j$

$i \setminus j$	1	2	3
1	0	\vec{e}_3	$-\vec{e}_2$
2	$-\vec{e}_3$	0	\vec{e}_1
3	\vec{e}_2	$-\vec{e}_1$	0

Schema:



Anwendung in der Geometrie:



$$F_{\text{Parallelogramm}} = F_{\text{Rechteck}} = |\vec{a} \times \vec{b}| = a \cdot b \cdot \sin(\alpha + \beta)$$

$$F_{\text{Parallelogramm}} = F_{\text{Rechteck 1}} + F_{\text{Rechteck 2}} = a \sin \alpha \cdot b \cos \beta + a \cos \alpha \cdot b \sin \beta$$

Additionstheorem

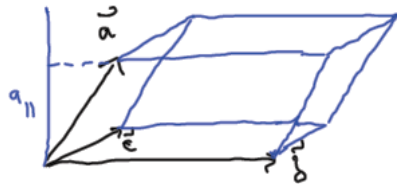
mehrfache Produkte:

$$\left. \begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) &= (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}) \\ (\vec{a} \times \vec{b})^2 &= a^2 b^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \overbrace{a_{\parallel} \cdot |\vec{b} \times \vec{c}|}^{\text{kann negativ sein}} = \text{Volumen des von } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ aufgespannten Spats}$$

„Spatprodukt“

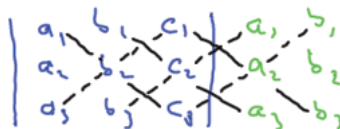
$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) &= \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \\ &= (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} \end{aligned} \quad (1.17)$$



In Komponenten:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) &= a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1 \\ &= \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.18)$$

Rechenschema: „Sarrus-Regel“



1.4 Index-Schreibweise

Skalarprodukt:

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases} =: \delta_{ij}$$

Tabelle δ_{ij}

$i \backslash j$	1	2	3
1	1	0	0
2	0	1	0
3	0	0	1

Kronecker-Symbol

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= \left(\sum_i \vec{e}_i a_i \right) \cdot \left(\sum_j \vec{e}_j b_j \right) = \sum_{i,j} \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \cdot a_i b_j \\ &= \sum_{i,j} \delta_{ij} a_i b_j = \sum_{i=j} \delta_{ij} a_i b_j = \sum_i a_i b_i \end{aligned} \quad (1.9')$$

Kreuzprodukt:

$$\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \sum_k \vec{e}_k c_k(i,j) = \sum_k \vec{e}_k \epsilon_{kij} \quad \text{Levi-Civita-Symbol } (\epsilon\text{-Symbol})$$

ϵ ist nicht Null für

i	j	k	ϵ_{ijk}	$\epsilon = 0$ falls zwei Indizes gleich
1	2	3	1	
1	3	2	-1	
2	3	1	1	
2	1	3	-1	
3	1	2	1	
3	2	1	-1	

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \left(\sum_i \vec{e}_i a_i \right) \times \left(\sum_j \vec{e}_j b_j \right) = \sum_{i,j} \vec{e}_i \times \vec{e}_j a_i b_j \\ &= \sum_{i,j} \sum_k \vec{e}_k \epsilon_{kij} a_i b_j = \sum_{i,j,k} \vec{e}_k \epsilon_{kij} a_i b_j \end{aligned} \quad (1.15')$$

$$(\vec{a} \times \vec{b})_k = \sum_{i,j} \epsilon_{ijk} a_i b_j \quad (1.15'')$$

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b})_l &= (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{e}_l = \sum_{i,j,k} \vec{e}_k \cdot \vec{e}_l \epsilon_{kij} a_i b_j \\ &= \sum_{i,j,k} \delta_{kl} \epsilon_{kij} a_i b_j = \sum_{i,j} \epsilon_{lij} a_i b_j \end{aligned}$$

1 Vektoren

Spatprodukt

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) &= \sum_k a_k (\vec{b} \times \vec{c})_k = \sum_{k,i,j} a_k \varepsilon_{kij} b_i c_j \\ &= \sum_{k,i,j} \varepsilon_{kij} a_k b_i c_j = \text{Determinante } |\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}| \end{aligned} \quad (1.18')$$

Rechenregeln / Eigenschaften

$$\delta_{ij} = \delta_{ji}$$

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{kij} = -\varepsilon_{ikj} = -\varepsilon_{kji} = -\varepsilon_{jik}$$

$$\sum_j \delta_{ij} \delta_{jk} = \delta_{ik}$$

$$\sum_{i,j} \delta_{ij} \delta_{ji} = \sum_i \delta_{ii} = 3 \quad (1.19)$$

$$\sum_{i,j} \delta_{ij} \varepsilon_{ijk} = 0$$

$$\sum_k \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmk} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl} \quad (1.20)$$

Dies ist das Gleiche wie $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = \vec{a} \cdot \vec{c} \vec{b} \cdot \vec{d} - \vec{a} \cdot \vec{d} \vec{b} \cdot \vec{c}$

$$\sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ljk} = 2 \delta_{il} \quad \left| \quad \sum_{j,m} (1.20) \delta_{mj} = \dots \right.$$

$$\sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijk} = 6$$

Einsteins Summationskonvention:

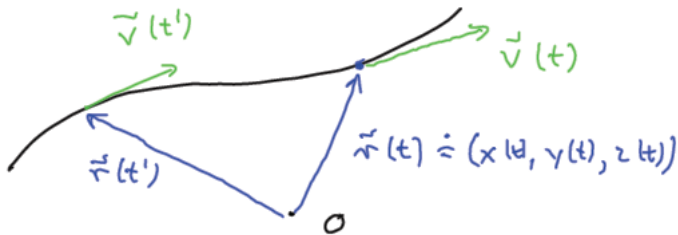
Lasse \sum weg

2 Kinematik

2.1 Raumkurven

Vektorfunktion

$$\vec{f}(t) \doteq (f_1(t) , f_2(t) , f_3(t))$$

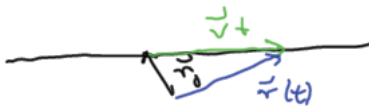


Beispiele:

- Geradlinig, konst. Geschwindigkeit \vec{v} zur Zeit $t = 0$ sei $\vec{r}(0) = \vec{r}_0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= \vec{r}_0 + \vec{v}t \\ &\doteq (x_0 + v_1t , y_0 + v_2t , z_0 + v_3t) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Parameterdarstellung einer Geraden



- Kreisbewegung in xy-Ebene am Ursprung, im positiven Drehsinn mit konstantem $v = (|\vec{v}|)$

Start

$$t = 0, \phi = 0$$

Bogenlänge

$$s(t) = vt$$

Winkel

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \frac{s(t)}{R} = \frac{vt}{R} = \underbrace{\text{Winkel-Geschw } \omega = \frac{v}{R}}_{\omega} t \\ \vec{r}(t) &\doteq R (\cos \omega t, \sin \omega t, 0) \end{aligned} \quad (2.2)$$

2 Kinematik

Periode

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{weil} \quad \vec{r}(t+T) = \vec{r}(t)$$

Geschwindigkeit:

$$\vec{v} \perp \vec{r} \curvearrowright \vec{v} \parallel \vec{e}_3 \times \vec{r}, \quad v = R\omega$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \\ \cos \\ 0 \end{pmatrix} \doteq \vec{e}_v \quad \curvearrowright \quad \vec{v} = v\vec{e}_v = R\omega\vec{e}_v$$

$$\vec{v}(t) \doteq R\omega (-\sin \omega t, \cos \omega t, 0) \quad (2.3)$$

alternativ:

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}(t) = \dot{\vec{r}}(t) \doteq (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)) \quad \checkmark$$

gilt allgemein:

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) \quad (2.4)$$

- Schraubenlinie (in z-Richtung)

$$\vec{r}(t) \doteq (R \cos \omega t, R \sin \omega t, v_3 t) \quad (2.5)$$

Bemerkung zur Kreisbewegung:

i.a. ist ω ein Vektor

Winkelgeschwindigkeit

$$\vec{\omega}(t) = \omega(t)\vec{e}_{Achse}(t)$$

Geschwindigkeit

$$\vec{v}(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}(t) \quad (2.6)$$

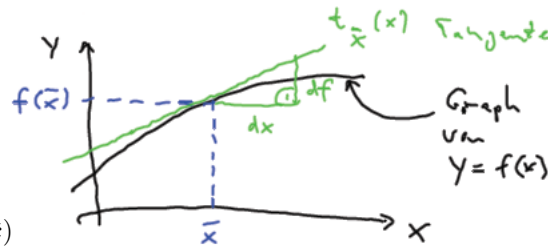


2.2 Differenzieren

Ableitung von $f(x)$ bei \bar{x}

= Anstieg der Kurve bei $x = \bar{x}$

= Steigung der Tangente bei \bar{x}



Tangente: $t_{\bar{x}}(x) = f(\bar{x}) + a \cdot (x - \bar{x})$

Notation: $a = a(\bar{x}) =: \underbrace{f'(\bar{x})}_{\text{Ableitung}}$

$$f'(\bar{x}) \equiv (\partial_x f)(\bar{x}) = \frac{df}{dx}(\bar{x}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \underbrace{\frac{f(\bar{x} + \epsilon) - f(\bar{x})}{\epsilon}}_{\text{Differentialquotient}} \quad (2.7)$$

df, dx : „Differenziale“

andersherrum:

$$\left. \begin{aligned} f(\bar{x} + \epsilon) &= f(\bar{x}) + \epsilon \cdot f'(\bar{x}) + O(\epsilon^2) \\ df(\bar{x}) &= f'(\bar{x}) \cdot dx \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

$O(\epsilon^k)$ = Terme, die mindestens so schnell wie ϵ^k nach Null gehen

(„von Ordnung ϵ^k “)

Differenzieren = Bilden der Ableitung für jedes \bar{x}

Ergebnis: Ableitungsfunktion $f'(\bar{x})$ von \bar{x}

Ableiten ist eine Operation

$$f \mapsto f' \equiv \frac{df}{dx} \equiv \partial_x f$$

$$\frac{d}{dx} \quad \text{oder} \quad \partial_x$$

Funktionswerte sind

$$f'(x) \equiv \frac{df}{dx}(x) \equiv (\partial_x f)(x)$$

Beispiele

- $f(x) = x^3$

$$\begin{aligned} \partial_x x^3 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{(x + \epsilon)^3 - x^3}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2\epsilon + 3x\epsilon^2 + \epsilon^3 - x^3}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\cancel{x^3} + 3x^2 + 3x\epsilon + \epsilon^2}{\cancel{\epsilon}} = 3x^2 \end{aligned}$$

2 Kinematik

- $f(x) = \sqrt{x}$

$$\begin{aligned}\partial_x \sqrt{x} &= \frac{\sqrt{x+\varepsilon} - \sqrt{x}}{\varepsilon} = \frac{(\sqrt{x+\varepsilon} - \sqrt{x})(\sqrt{x+\varepsilon} + \sqrt{x})}{\varepsilon(\sqrt{x+\varepsilon} + \sqrt{x})} \\ &= \frac{\cancel{x} + \varepsilon - \cancel{x}}{\varepsilon(\sqrt{x+\varepsilon} + \sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\end{aligned}$$

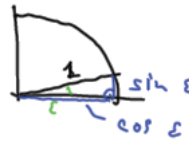
- $f(x) = \frac{1}{x}$

$$\partial_x \frac{1}{x} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{x - (x+\varepsilon)}{(x+\varepsilon)x} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{-\varepsilon}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

- $f(x) = \cos x$

$$\sin \varepsilon = \varepsilon + O(\varepsilon^3)$$

$$\cos \varepsilon = 1 + O(\varepsilon^2)$$



$$\begin{aligned}\partial_x \cos x &= \frac{1}{\varepsilon} [\cos(x+\varepsilon) - \cos x] = \frac{1}{\varepsilon} [\cos x \cdot \cos \varepsilon - \sin x \cdot \sin \varepsilon - \cos x] \\ &= \frac{1}{\varepsilon} [\cancel{\cos x} \cdot 1 - \sin x \cdot \varepsilon - \cancel{\cos x}] \\ &= -\sin x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial_t \cos \omega t &= \frac{d \cos \omega t}{dt} = \omega \frac{d \cos \omega t}{d\omega t} = \omega \frac{d \cos x}{dx} \\ &= -\omega \sin x = -\omega \sin \omega t\end{aligned}$$

Leibnizregel oder Produktregel

$$\begin{aligned}\partial_x (f \cdot g)(x) &= \frac{1}{\varepsilon} [f(x+\varepsilon) \cdot g(x+\varepsilon) - f(x) \cdot g(x)] \\ &= \frac{1}{\varepsilon} [\{f(x) + \varepsilon f'(x)\} \{g(x) + \varepsilon g'(x)\} - f(x) g(x)] \\ &= \frac{1}{\varepsilon} [\cancel{f} \cdot g + \varepsilon f' \cdot g + \varepsilon f \cdot g' + \varepsilon^2 f' g' - \cancel{f} \cdot g] \\ (f \cdot g)'(x) &= (f' \cdot g)(x) + (f \cdot g')(x)\end{aligned} \tag{2.9}$$

Differenzieren einer Vektorfunktion

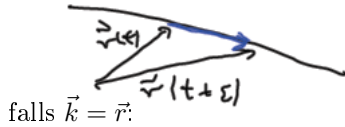
$$\vec{k}(t) \doteq (k_1(t), k_2(t), k_3(t))$$

math.: Abb.

$$\begin{aligned}\mathbb{R} \subset I &\longrightarrow \vec{k} \\ t &\longmapsto \vec{k}(t)\end{aligned}$$

Änderungsvektor:

$$\begin{aligned} \partial_t \vec{k}(t) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\vec{k}(t+\varepsilon) - \vec{k}(t)}{\varepsilon} = \frac{d\vec{k}}{dt}(t) =: \dot{\vec{k}}(t) \\ &\doteq (\dot{k}_1(t), \dot{k}_2(t), \dot{k}_3(t)) \\ &\doteq \vec{e}_1 \dot{k}_1(t) + \vec{e}_2 \dot{k}_2(t) + \vec{e}_3 \dot{k}_3(t) \end{aligned}$$



Geschwindigkeit:

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) \doteq (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \quad (2.4)$$

Beschleunigung:

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) \doteq (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}) \quad (2.10)$$

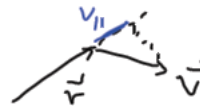
Rechenregeln:

$$\begin{aligned} \partial_t (\vec{a} + \vec{b}) &= \dot{\vec{a}} + \dot{\vec{b}} \quad , \quad \partial_t (\vec{a} \cdot \vec{b}) = \dot{\vec{a}} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \dot{\vec{b}} \\ \partial_t (\lambda \vec{a}) &= \dot{\lambda} \vec{a} + \lambda \dot{\vec{a}} \quad , \quad \partial_t (\vec{a} \times \vec{b}) = \dot{\vec{a}} \times \vec{b} + \vec{a} \times \dot{\vec{b}} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Tricks:

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \text{const.} \quad \longrightarrow \quad \dot{\vec{a}} \cdot \vec{b} = -\vec{a} \cdot \dot{\vec{b}}$
z. B. $\vec{e} \cdot \dot{\vec{e}} = 0$ für $(\vec{e})^2 = 1$
- $\vec{a} \cdot \dot{\vec{a}} = \frac{1}{2} \partial_t (\vec{a} \cdot \vec{a}) = \frac{1}{2} \partial_t a^2 = a \dot{a}$ mit $a = |\vec{a}|$

Anwendung: $\vec{a} = \vec{r} \curvearrowright \dot{\vec{r}} = \vec{r}' \cdot \frac{\dot{\vec{r}}}{r} = \dot{\vec{r}} \cdot \vec{e}_r = v_{\parallel} \neq v$



Beispiele:

- gradlinige Bewegung nach oben

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &\doteq (a, v_0 t) & r &= \sqrt{a^2 + v_0^2 t^2} \\ \dot{\vec{r}}(t) &\doteq (0, v_0) & v &= v_0 \neq \dot{r} = \frac{v_0^2 t}{\sqrt{a^2 + v_0^2 t^2}} \\ \ddot{\vec{r}}(t) &\doteq (0, 0) & a &= 0 \end{aligned}$$

- Kreisbewegung $c := \cos \omega t$, $s := \sin \omega t$

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &\doteq R(c, s) & r &= R & \dot{r} &= 0 \\ \dot{\vec{r}}(t) &\doteq R\omega(-s, c) & v &= R\omega & \dot{v} &= 0 \\ \ddot{\vec{r}}(t) &\doteq R\omega^2(-c, -s) \doteq -\omega^2 \vec{r}(t) & a &= R\omega^2 & \dot{a} &= 0 \end{aligned}$$

2 Kinematik

begleitendes Dreiein einer Raumkurve $\vec{r}(t)$

$$\vec{t} = \frac{\dot{\vec{r}}}{v} \quad \text{Tangenten-Einheitsvektor} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \dot{\vec{t}} &= \frac{\ddot{\vec{r}}}{v} - \frac{\dot{\vec{r}}\dot{v}}{v^2} = \frac{\dot{\vec{r}} \times (\ddot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}})}{v^3} \perp \vec{t} \\ &= v \kappa \vec{n} \quad \vec{n} : \text{Normalen-Einheitsvektor} \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\dot{\vec{t}} \cdot \vec{n} = v \kappa \vec{n} \cdot \vec{n} = v \kappa = |\dot{\vec{t}}| = \frac{|\ddot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}|}{v^2} = \frac{|\ddot{r}_\perp|}{v}$$



$$\kappa = \frac{|\ddot{r}_\perp|}{v^2} \quad \text{Krümmung} \quad \frac{1}{\kappa} \quad \text{Krümmungsradius}$$

$$\dot{\vec{n}} = v (\lambda \vec{t} + \tau \vec{b}) \quad \text{mit} \quad \vec{b} = \vec{t} \times \vec{n} = \frac{\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|} \quad \text{Binormale} \quad (2.14)$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{t} \curvearrowright v \lambda &= \dot{\vec{n}} \cdot \vec{t} \stackrel{\text{Trick}}{=} -\vec{n} \cdot \dot{\vec{t}} = -v \kappa \curvearrowright \lambda = -\kappa \\ \vec{b} \curvearrowright v \tau &= \dot{\vec{b}} \cdot \vec{b} = \dots = v \frac{\dot{\vec{r}} \cdot (\ddot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}})}{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|^2} \quad \tau : \text{Torsion} \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

$$\dot{\vec{b}} = \partial_t (\vec{t} \times \vec{n}) = \overbrace{\dot{\vec{t}} \times \vec{n}}^{=0} + \vec{t} \times \dot{\vec{n}} = -v \tau \vec{n}$$

zusammen:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\vec{t}} &= v \kappa \vec{n} \\ \dot{\vec{n}} &= -v \kappa \vec{t} + v \tau \vec{b} \\ \dot{\vec{b}} &= -v \tau \vec{n} \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

Frénet-Formeln

$$\left. \begin{aligned} \kappa &= \frac{|\ddot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}|}{v^3} \\ \tau &= \frac{\dot{\vec{r}} \cdot (\ddot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}})}{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

Geschwindigkeit & Beschleunigung $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = v \vec{t}$ tangential

$$\begin{aligned} \vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \partial_t (v \vec{t}) &= \dot{v} \vec{t} + v \dot{\vec{t}} = \dot{v} \vec{t} + v^2 \kappa \vec{n} \\ \text{in Schmiegungebene} &= a_{\parallel} \vec{t} + a_{\perp} \vec{n} \end{aligned} \quad (2.18)$$

2.3 Kettenregel und Gradient

sei $h(x) := f(g(x)) = f(y)$ mit $y = g(x)$
 $x \xrightarrow{g} y = g(x) \xrightarrow{f} f(y) = f(g(x)) = h(x) \quad h = f \circ g$
 differenziere:

$$\begin{aligned}
 (\partial_x h)(x) &= \frac{1}{\epsilon} [h(x + \epsilon) - h(x)] = \frac{1}{\epsilon} [f(g(x + \epsilon)) - f(g(x))] \\
 &= \frac{1}{\epsilon} [f(\overbrace{g(x)}^y + \overbrace{\epsilon \cdot g'(x)}^\delta) - f(g(x))] = \frac{1}{\epsilon} [f(y + \delta) - f(y)] \quad (2.19a) \\
 &= \frac{1}{\epsilon} [\underbrace{f(y)}_{f(g)} + \delta \cdot f'(y) - f(y)] = \frac{1}{\epsilon} [\epsilon \cdot g'(x) \cdot f'(g(x))] \\
 &= f'(g(x)) \cdot g'(x) = (\partial_y f)(g(x)) \cdot (\partial_x g)(x)
 \end{aligned}$$

anders:

$$\frac{dh}{dx} = \frac{d(f \circ g)}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx} \quad (2.19b)$$

$$\left[\text{Vorsicht: } \underbrace{f(g(x))}'_{h'(x)} = f'(g(x)) = f'(y) \quad \text{falsch!} \right]$$

Funktionen mehrerer Variabler

$$f(x, y, z) \quad \underbrace{(\partial_x f)(x, y, z)}_{\text{partielle Ableitung}} = \frac{1}{\epsilon} [f(x + \epsilon, y, z) - f(x, y, z)]$$

genauso $\partial_y f, \partial_z f$ entsprechend

Verkettung:

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t) \rightsquigarrow \underbrace{f(\vec{r}(t))}_{h(t)}$$

Ableitung:

$$\begin{aligned}
 \partial_t h &= \frac{1}{\epsilon} [f(x(t + \epsilon), y(t + \epsilon), z(t + \epsilon)) - f(x, y, z)] \\
 &= \frac{1}{\epsilon} [f(x(t) + \epsilon \dot{x}(t), y(t) + \epsilon \dot{y}(t), z(t) + \epsilon \dot{z}(t)) - f(x, y, z)] \\
 &+ \frac{1}{\epsilon} [-f(x, y + \epsilon \dot{y}, z + \epsilon \dot{z}) + f(x, y + \epsilon \dot{y}, z + \epsilon \dot{z}) - f(x, y, z + \epsilon \dot{z}) + f(x, y, z + \epsilon \dot{z})] \text{ Null addiert} \\
 &= \partial_x f(x, y, z) \cdot \dot{x} + \partial_y f(x, y, z) \cdot \dot{y} + \partial_z f(x, y, z) \cdot \dot{z}
 \end{aligned}$$

2 Kinematik

also:

$$\begin{aligned}\partial_t f(\vec{r}(t)) &= \dot{x}(t)\partial_x f(\vec{r}(t)) + \dot{y}(t)\partial_y f(\vec{r}(t)) + \dot{z}(t)\partial_z f(\vec{r}(t)) \\ &\doteq \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \\ \partial_z f \end{pmatrix}(\vec{r}(t)) \doteq \dot{\vec{r}} \cdot \underbrace{\vec{\nabla}}_{\text{Nabla}} f(\vec{r}(t))\end{aligned}\quad (2.20)$$

Gradient einer Funktion

$$\vec{\nabla} f(x, y, z) \doteq (\partial_x f(x, y, z), \partial_y f(x, y, z), \partial_z f(x, y, z))$$

anschaulich:

gegeben Potenzial $V(\vec{r})$ (für $f(\vec{r})$)

Äquipotenzialfläche $V(\vec{r}) = \text{const.} \rightsquigarrow \vec{r} \in \text{Fläche}$

Trick: Betrachte Kurve $\vec{r}(t)$ in der Ä-Fläche

dann gilt:

$$0 = \partial_t V(\vec{r}(t)) = \underbrace{\dot{\vec{r}}(t)}_{\text{in Ä-Fläche}} \cdot \vec{\nabla} V(\vec{r}(t))$$



$$\Rightarrow \vec{\nabla} V \perp \text{Ä-Fläche}$$

3 Dynamik

3.1 Kraftfelder

$$m \ddot{\vec{r}} = \vec{F} \quad \text{Newton 2} \quad (3.1)$$

benötigt Kraft-Gesetz $\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = ?$

insbesondere außerhalb von $\vec{r} = \vec{r}(t)$

Strategie:

$$\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \xrightarrow{(3.1)} \vec{r}(t) \quad \text{„Mechanik“}$$

Beispiel:

$$\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = q \left(\vec{E}(\vec{r}, t) + \dot{\vec{r}} \times \vec{B}(\vec{r}, t) \right) \quad \text{Lorentzkraft} \quad (3.2)$$

umgekehrt:

$$\vec{r}(t) \xrightarrow{\text{Maxwell}} \vec{E}(\vec{r}, t) \quad \text{„E-Dynamik“}$$

Bemerkungen:

- $\vec{F} = 0 \curvearrowright \ddot{\vec{r}} = 0 \curvearrowright \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t$ Newton 1
definiert Inertialsystem
- m ist positiver Skalar, „träge Masse“, Eigenschaft des Teilchens
- $\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$ hängt nicht ab von $\ddot{\vec{r}}, \ddot{\dot{\vec{r}}}$ etc. / $\vec{F}(\vec{r}, t)$ „Kraftfeld“

Newton 2 = gekoppeltes System von 3 gewöhnlichen
Differentialgleichungen 2. Ordnung in $\vec{r}(t)$

Lösungsidee:

kenne $\vec{r}(t), \vec{v}(t)$ zu einer Zeit t.

$$\vec{r}(t + dt) = \vec{r}(t) + dt \cdot \vec{v}(t)$$

$$\vec{v}(t + dt) = \vec{v}(t) + dt \cdot \vec{a}(t) \stackrel{(3.1)}{=} \vec{v}(t) + dt \cdot \frac{1}{m} \vec{F}(\vec{r}(t), \vec{v}(t), t)$$

Lektion:

eindeutige Lösung erfordert Anfangsbedingungen
 $\vec{r}(t)$ für $t > t_0$ $\vec{r}(t_0), \dot{\vec{r}}(t_0)$

3 Dynamik

Fall 1: freier Fall (auch Würfe)

Gravitations-Kraftgesetz:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\gamma \frac{mM}{(\vec{r} - \vec{r}_0)^2} \underbrace{\vec{e}_{\vec{r}-\vec{r}_0}}_{\frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}} \quad \text{Newton} \quad (3.3)$$

Wähle Ursprung auf Erdoberfläche $\curvearrowright \vec{r}_0 = -R \vec{e}_3$ $R \approx 6370 \text{ km}$
 Näherung nahe der Erdoberfläche: $|\vec{r}| \ll R$

$$\begin{aligned} \vec{F}(\vec{r}) &\doteq -\gamma mM \frac{(x, y, z + R)}{[x^2 + y^2 + (z + R)^2]^{\frac{3}{2}}} \doteq -\gamma \frac{mM}{R^2} \frac{\left(\frac{x}{R}, \frac{y}{R}, \frac{z+R}{R}\right)}{\left[\left(\frac{x}{R}\right)^2 + \left(\frac{y}{R}\right)^2 + \left(\frac{z+R}{R}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \\ &\approx \gamma \frac{mM}{R^2} \frac{(0, 0, 1)}{[0^2 + 0^2 + 1^2]^{\frac{3}{2}}} \doteq -mg \vec{e}_3 \quad \text{mit} \quad g = \frac{\gamma M}{R^2} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Wähle AW!

$$\text{Herunterfallen:} \quad \begin{cases} \vec{r}(0) \doteq (0, 0, h) \\ \dot{\vec{r}}(0) \doteq (0, 0, 0) \end{cases}$$

Newton:

$$\mathcal{M}(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}) = -\mathcal{M}g(0, 0, 1)$$

in Komponenten:

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = 0, \quad \ddot{z} = -g \quad (*)$$

Lösung:

$$x(t) = 0, \quad y(t) = 0, \quad z(t) = ?$$

Ansatz:

$$\text{z.B.} \quad z(t) = A + B \cdot t + C \cdot t^2 + D \cdot t^3 + E \cdot \sin \omega t$$

Einsetzen:

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= B + 2C \cdot t + 3D \cdot t^2 + E \omega \cos \omega t \\ \ddot{z}(t) &= 2C + 6D \cdot t - E \omega^2 \sin \omega t \end{aligned}$$

Vergleich mit (*) gibt:

$$2C = -g, \quad D = 0, \quad E = 0$$

Vergleich mit AW gibt:

$$0 = \dot{z}(0) = B, \quad h = z(0) = A$$

eindeutige Lösung:

$$z(t) = h - \frac{1}{2} g t^2 \quad (3.5)$$

Fall 2: harmonischer Oszillator

Hooke:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\kappa(\vec{r} - \vec{r}_0) \quad (3.6)$$

wähle $\vec{r}_0 = 0$ $\vec{r} = \vec{r}_0$ ist Ruhelage



Newton:

$$m(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}) = -\kappa(x, y, z)$$

für x-Komponente:

$$\ddot{x} = -\frac{\kappa}{m}x \quad \otimes$$

Ansatz:

$$x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad \bullet$$

Einsetzen:

$$\dot{x}(t) = -A \omega \sin \omega t + B \omega \cos \omega t \quad \circ$$

$$\ddot{x}(t) = -A \omega^2 \cos \omega t - B \omega^2 \sin \omega t$$

$$\stackrel{!}{\otimes} -\frac{\kappa}{m}(A \cos \omega t + B \sin \omega t)$$

Vergleich:

$$\omega^2 = \frac{\kappa}{m} \quad \checkmark$$

es fehlen noch die AW, z.B.

$$\vec{r}(0) = \vec{r}_1, \quad \dot{\vec{r}}(0) = 0$$

also:

$$x(0) = x_1, \quad \dot{x}(0) = 0$$

Einsetzen in \bullet & \circ :

$$A \stackrel{!}{=} x_1, \quad B\omega \stackrel{!}{=} 0$$

zusammen:

$$x(t) = x_1 \cos \sqrt{\frac{\kappa}{m}} t$$

für alle Komponenten:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_1 \cos \sqrt{\frac{\kappa}{m}} t \quad (3.7)$$

[Spezialfall falls AW: $\vec{r}(0) = \vec{r}_1, \dot{\vec{r}}(0) = 0$]

3.2 Impuls und Drehimpuls

Impuls:

$$\vec{p} := m \vec{v} \tag{3.8}$$

→ Newton 2:

$$\dot{\vec{p}} = \vec{F} \tag{3.9}$$

falls $\vec{F} = 0 \leadsto \dot{\vec{p}} = 0 \leadsto \vec{p} = konst.$ Impulserhaltung

2-Teilchen-System, isoliert:

$$\text{Gesamtimpuls } \vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = konst.$$

Schwerpunktsbewegung:

$$\begin{aligned} \vec{R}_s &:= \frac{1}{M} (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2) \quad \text{mit } M = m_1 + m_2 \\ \dot{\vec{R}}_s &= \frac{1}{M} (m_1 \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \dot{\vec{r}}_2) = \frac{1}{M} (\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = \frac{\vec{P}}{M} = \text{const.} = \vec{V} \\ \leadsto \vec{R}_s(t) &= \vec{R}_s(0) + \vec{V} \cdot t \end{aligned}$$

Drehimpuls:

$$\vec{L} := m \vec{r} \times \vec{v} = \vec{r} \times \vec{p} \tag{3.10}$$

abhängig vom Bezugspunkt (hier: $\vec{r}_0 = 0$)

Newton 2:

$$\dot{\vec{L}} = \cancel{m \dot{\vec{r}} \times \vec{r}} + m \vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = \vec{r} \times \vec{F} =: \underbrace{\vec{N}}_{\text{Drehmoment}} \tag{3.11}$$

$\vec{N} = 0$ falls $\vec{F} = 0$ oder $\vec{F} \parallel \vec{r}$, d.h.

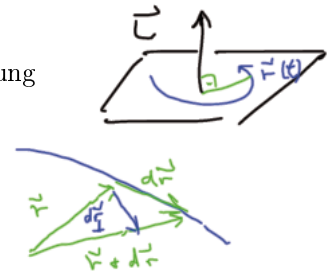
$\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = f(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \cdot \vec{e}_r$ Zentralkraft

2-Teilchen-System isoliert:

es gilt $\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = konst.$ Erhaltung des Gesamtdrehimpuls

geometrische Interpretation der Drehimpulserhaltung:

- $\vec{r} \cdot \vec{L} = \vec{r} \cdot (m \vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = 0$ $\vec{L} = konst.$ Ebenengleichung für $\vec{r}(t)$
- $\frac{1}{m} L = |\vec{r} \times \dot{\vec{r}}| = r \cdot v_{\perp} = r \left| \frac{d\vec{r}_{\perp}}{dt} \right|$
 $= 2 \cdot (\text{in } dt \text{ überstrichene Fläche } \Delta) / dt$
2. Kepler-Gesetz



3.3 Energie und Potenzial

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} \quad | \cdot \dot{\vec{r}} \quad \curvearrowright \quad m\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}} \cdot \vec{F} \quad (3.12)$$

$$\partial_t \left(\frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 \right) = m \dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}} \cdot \vec{F} = \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{F} \quad \text{Leistung}$$

kinetische Energie

$$T := \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 \quad (3.13)$$

wenn \exists Funktion $V(\vec{r})$ („Potenzial“) so dass

$$\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = -\vec{\nabla} V(\vec{r}) \quad (3.14)$$

dann gilt $\partial_t V(\vec{r}(t)) = \dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla} V(\vec{r}) \stackrel{3.14}{=} -\dot{\vec{r}} \cdot \vec{F}$
 und somit $\partial_t T = -\partial_t V$

\curvearrowright **Energie-Erhaltung:**

$$\partial_t(T + V) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\text{kin. + pot. Energie} = T + V = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2(t) + V(\vec{r}(t)) = \text{konst.} =: E \quad (3.15)$$

solche Kraft-Gesetze heißen „konservativ“

Beispiele:

A) $\vec{F} \doteq (0, 0, -mg) = (-\partial_x V, -\partial_y V, -\partial_z V)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = \partial_x V \\ 0 = \partial_y V \end{cases} \Rightarrow \underbrace{V = V(z)} \quad (3.16)$$

$$mg = \partial_z V \rightarrow mg = V'(z) \curvearrowright V = mgz + \mathcal{C} \quad \overset{=0 \text{ gew\u00e4hlt}}{\mathcal{C}}$$

B) $\vec{F} = -\kappa(r-l)\vec{e}_r$



raten:

$$V(\vec{r}) = \frac{\kappa}{2}(r-l)^2 \quad ? \quad (3.17)$$

Test:

$$\vec{\nabla} V(r) \doteq \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} V(r) = V'(r) \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} r = \otimes$$

3 Dynamik

nützlich: $\partial_i r = \partial_i \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{\partial_i(x^2 + y^2 + z^2)}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{2x_i}{2r} = \frac{x_i}{r}$

$$\leadsto \frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r} \Leftrightarrow \vec{\nabla} r = \vec{e}_r \quad (3.18)$$

$$\leadsto \vec{\nabla} f(r) = f'(r) \cdot \vec{\nabla} r = f'(r) \vec{e}_r$$

$$\otimes = V'(r) \begin{pmatrix} x/r \\ y/r \\ z/r \end{pmatrix} \doteq \kappa(r-l) \vec{e}_r \quad \checkmark$$

allgemein:

$$\text{Zentralkraft: } \vec{F} = f(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \vec{e}_r \quad \Leftrightarrow \dot{\vec{L}} = 0$$

$$\text{kons. Kraft: } \vec{F} = -\vec{\nabla} V(\vec{r}) \quad \Leftrightarrow \dot{E} = 0$$

beides:

konservative Zentralkraft:

$$\vec{F} = f(r) \vec{e}_r \text{ oder } \vec{F} = -\vec{\nabla} V(r), \quad f = -V' \quad (3.19)$$

C)

$$\vec{F} = -\gamma \frac{mM}{r^2} \vec{e}_r \quad \text{kons. Zentralkraft}$$

$$V(r) = -\gamma \frac{mM}{r} \quad (3.20)$$

D)

$$\vec{F} \doteq \kappa(-x, z-y, z-y) \quad \exists V? \quad \text{zu Fuß:}$$

$$-F_x = \kappa x \stackrel{!}{=} \partial_x V \leadsto V = \frac{\kappa}{2} x^2 + f(y, z)$$

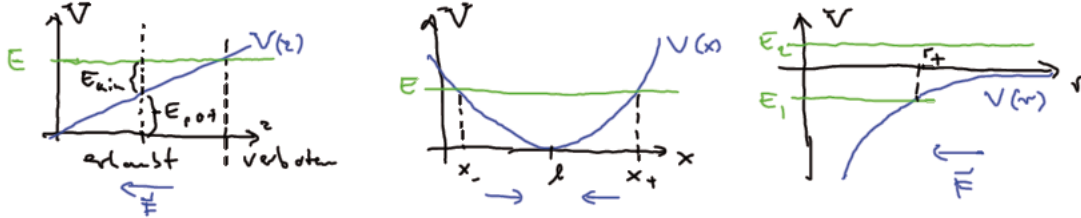
$$-F_y = \kappa y - \kappa z \stackrel{!}{=} \partial_y V = \partial_y f \leadsto f(y, z) = \frac{\kappa}{2} y^2 - \kappa y z + g(z)$$

$$-F_z = \kappa y - \kappa z \stackrel{!}{=} \partial_z V = \underline{-\kappa y + g'(z)}$$

$$\leadsto g'(z) = 2\kappa y - \kappa z \quad \text{Widerspruch, weil von } y \text{ abhängig}$$

3.4 Eindimensionale Bewegung mit dem Energiesatz

Bewegungstyp aus Potenzial ablesbar, z.B.



erlaubte Bewegung: $V(x) \leq E$, $E - V(x) = T(x) = \frac{1}{2}mv^2$

Umkehrpunkte: $V(x_{\pm}) = E \Leftrightarrow T(x_{\pm}) = 0$

Lösung über Energiesatz (statt Newton 2:)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m\dot{x}^2 &= E - V(x) \quad \leadsto \quad \dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))} \\ \dot{x} &= \frac{dx}{dt} \quad \leadsto \quad dx = \pm \sqrt{\quad} dt \quad \leadsto \quad dt = \pm \frac{dx}{\sqrt{\quad}} \quad \leadsto \\ \int_{t_0}^t dt' &= \pm \int_{x_0}^x \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x'))}} \quad \leadsto \quad t - t_0 = \pm \int_{x_0}^x \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x'))}} \end{aligned} \quad (3.21)$$

das liefert $t = t(x) \leadsto x(t)$ mit $x(t_0) = x_0$

gebundene Bewegung ist periodisch, mit Periode

$$T(E) = 2 \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}} \quad \text{mit Umkehrpunkten } x_{\pm} \quad (3.22)$$

3.5 Dreidimensionale Bewegung unter konservativer Zentralkraft

Teilchen unter Einfluß $\vec{F}(r) = -\vec{\nabla}V(r)$

erhalten sind $L = mv_{\perp}r$ & $E = \frac{1}{2}mv^2 + V(r)$

$\vec{L} = \text{konst.}$ \leadsto Bewegung in Ebene ($\vartheta = \pi/2 \Leftrightarrow z = 0$)

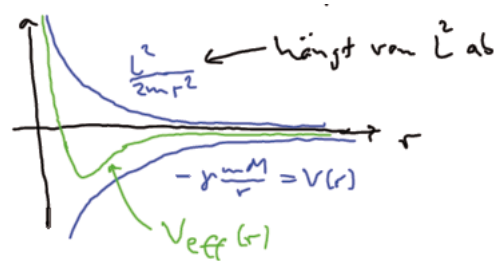
$\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}$ (bzgl \vec{r}) $\leadsto v^2 = v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2$ mit $v_{\parallel} = \vec{v} \cdot \vec{e}_r = \dot{r}$

$v_{\perp} = \frac{L}{mr}$ soll eliminiert werden.

Jetzt Energieerhaltung:

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{1}{2}m(v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2) + V(r) \\
 &= \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \frac{L^2}{m^2r^2}\right) + V(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{L^2}{2mr^2}}_{\text{Zentrifugalbarriere}} + V(r) \\
 &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underline{V_{eff}(r)} \quad \text{„effektives Potenzial“} \quad (3.23)
 \end{aligned}$$

Beispiel Gravitationspotenzial:



eindimensionales Ersatzproblem mit $V_{eff}(r)$

$$\dot{r}(t) = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{eff}(r))}, \quad r\dot{\varphi}(t) = v_{\perp} = \frac{L}{mr(t)}, \quad \vartheta = \frac{\pi}{2} \quad (3.24)$$

$$t - t_0 = \pm \int_{r_0}^r \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{eff}(r'))}} \leadsto \varphi - \varphi_0 = \frac{L}{m} \int_{t_0}^t \frac{dt'}{r^2(t')} \quad (3.25)$$

\rightarrow Parameterdarstellung der Bahn: $r(t), \varphi(t), \vartheta(t)$

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{dt}{dr} = \frac{L}{mr^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{eff}(r))}}$$

3.5 Dreidimensionale Bewegung unter konservativer Zentralkraft

Polardarstellung der Bahnkurve

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{L}{\sqrt{2m}} \int_{r_0}^r \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{E - V_{eff}(r')}} \rightsquigarrow \varphi(r) \rightsquigarrow r(\varphi) \quad (3.26)$$

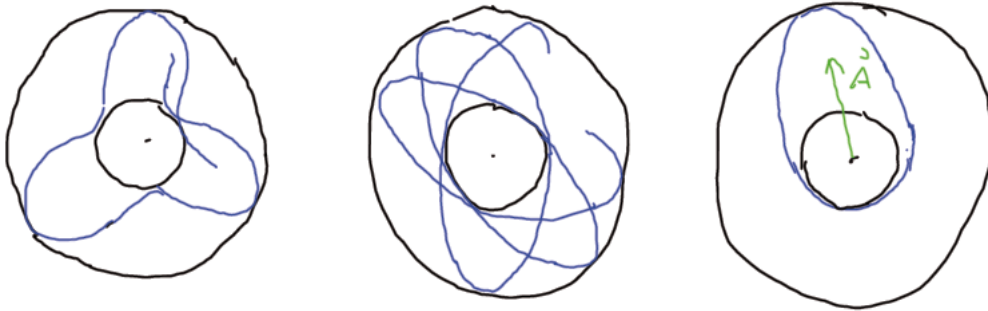
Schwingungsperiode bei gebundener Bewegung

$$T = 2 \int_{r_-}^{r_+} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{eff}(r))}} \quad (3.27)$$

zugehöriger Winkel ist

$$\Delta\varphi = \frac{2L}{\sqrt{2m}} \int_{r_-}^{r_+} \frac{dr}{r^2 \sqrt{E - V_{eff}(r)}}$$

Beispiele



Bahn ist geschlossen falls $k \cdot \Delta\varphi = n \cdot 2\pi$ $k, n \in \mathbb{Z}$ (rechtes Bild)
 Eine geschlossene Bahn ist die Ausnahme!

3.6 Keplerproblem

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r} \quad \begin{cases} \alpha > 0 & \text{attraktiv} \\ \alpha < 0 & \text{repulsiv} \end{cases} \quad (3.28)$$

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{\alpha}{r^2} \vec{e}_r = -\frac{\alpha}{r^3} \vec{r}$$

Erhaltungssätze:

- Energie: $E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 - \frac{\alpha}{r} \quad (1)$

- Drehimpuls: $\vec{L} = m \vec{r} \times \dot{\vec{r}} \quad (3)$

- Runge-Lenz Vektor:

$$\vec{A} = \dot{\vec{r}} \times \vec{L} - \alpha \vec{e}_r \quad \left(\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r} \right) \quad (3) \text{ aber nur (1) unabh.} \quad (3.29)$$

Beweis für \vec{A} :

$$\begin{aligned} \dot{\vec{A}} &= \underbrace{\ddot{\vec{r}} \times \vec{L}}_{=0} + \dot{\vec{r}} \times \underbrace{\dot{\vec{L}}}_{=0} + \frac{\alpha}{r^2} \dot{r} \vec{r} - \frac{\alpha}{r} \dot{\vec{r}} \\ \ddot{\vec{r}} \times \vec{L} &= -\frac{\alpha}{m r^3} \vec{r} \times (m \vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = -\frac{\alpha}{r^3} (\vec{r} \overbrace{(\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}})}^{=r\dot{r}}) - \dot{\vec{r}} \overbrace{(\vec{r} \cdot \vec{r})}^{=r^2} \\ &= -\frac{\alpha}{r^2} \dot{r} \vec{r} + \frac{\alpha}{r} \dot{\vec{r}} \rightarrow \dot{\vec{A}} = 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Ausnutzen:

$$\begin{aligned} \vec{A}^2 &= \vec{A} \cdot \vec{A} = \left(\dot{\vec{r}} \times \vec{L} - \frac{\alpha}{r} \vec{r} \right)^2 \\ &= \underbrace{\left(\dot{\vec{r}} \times \vec{L} \right)^2}_{=0} - \frac{2\alpha}{r} \underbrace{\left(\dot{\vec{r}} \times \vec{r} \right) \cdot \vec{L}}_{=0} + \frac{\alpha^2}{r^2} \vec{r} \cdot \vec{r} \\ &= \underbrace{\dot{r}^2 \vec{L}^2}_{=0} - \frac{2\alpha}{r} \underbrace{\left(\dot{\vec{r}} \times \vec{L} \right) \cdot \vec{L}}_{=0} + \alpha^2 \\ &= \dot{r}^2 \vec{L}^2 - \frac{2\alpha}{r} \frac{1}{m} \vec{L} \cdot \vec{L} + \alpha^2 \\ &= \vec{L}^2 \left(\dot{r}^2 - \frac{2\alpha}{mr} \right) + \alpha^2 = \frac{2L^2}{m} E + \alpha^2 \\ \hookrightarrow A &= \alpha \sqrt{1 + \frac{2L^2 E}{m\alpha^2}} =: \alpha \cdot \varepsilon \leftarrow \text{numerische Exzentrizität} \quad (3.30) \end{aligned}$$

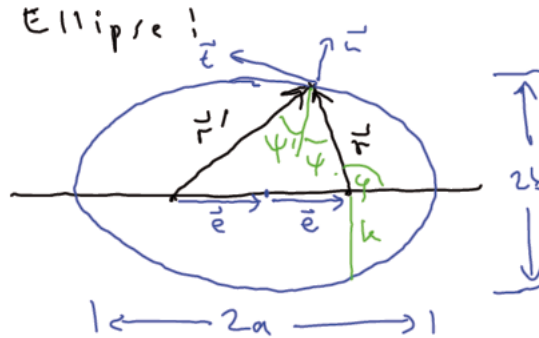
3.6 Keplerproblem

$$\vec{A} \cdot \vec{L} = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{r} &= (\dot{\vec{r}} \times \vec{L}) \cdot \vec{r} - \frac{\alpha}{r} \vec{r} \cdot \vec{r} = \frac{L^2}{m} - \alpha r \\ \text{aber auch } \vec{A} \cdot \vec{r} &= Ar \cos \varphi = \alpha \varepsilon r \cos \varphi \end{aligned} \right\} r(\varphi) !$$

$$r(\varphi) = \frac{k}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \quad \text{mit} \quad k = \frac{L^2}{m\alpha} \quad (3.31)$$

welche Kurve? Ellipse !



$r + r' = \text{konst.}$ Ä-Linie von

$$V(x, y) = r + r'$$

$$\curvearrowright 0 = \vec{\nabla} V \cdot \vec{t} = (\vec{\nabla} r + \vec{\nabla} r') \cdot \vec{t} = (\vec{e}_r + \vec{e}_{r'}) \cdot \vec{t}$$

$$= -\cos\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \psi'\right) = -\sin \psi + \sin \psi'$$

Es gilt:

$$r + r' = 2a$$

$$r' = 2a - r$$

$$r'^2 = 4a^2 - 4ar + r^2 \quad \otimes$$

aber auch

$$\vec{r}' = 2\vec{e} + \vec{r}$$

$$r'^2 = 4e^2 + 4\vec{e} \cdot \vec{r} + r^2$$

$$r'^2 = 4e^2 + 4er \cos \varphi + r^2 \quad \oplus$$

Gleichsetzen von \otimes und \oplus ergibt ...

$$a^2 - ar = e^2 + er \cos \varphi \quad \Leftarrow$$

$$r(a + e \cos \varphi) = a^2 - e^2$$

$$r(1 + \varepsilon \cos \varphi) = \frac{a^2 - e^2}{a} = \frac{b^2}{a} =: k \quad \Leftarrow \text{„Parameter“}$$

$$r = \frac{k}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \quad \text{Polardarstellung einer Ellipse } (\varepsilon < 1)$$

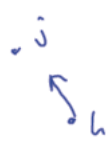
Def: $\varepsilon := \frac{e}{a} < 1 \Rightarrow \varepsilon = 0 \text{ Kreis} \quad \varepsilon = 1 \text{ Parabel} \quad \varepsilon > 1 \text{ Hyperbel}$

3.7 Systeme von Massepunkten

N Massepunkte $\vec{r}_i \quad i = 1, \dots, N \quad \vec{r}_{jk} = \vec{r}_j - \vec{r}_k$

Paarwechselwirkung $\vec{F}_{jk} = F_{jk}(r_{jk}) \cdot \frac{\vec{r}_{jk}}{r_{jk}} = \text{Kraft von „j“ auf „k“}$

symmetrisch $F_{jk} = F_{kj} \quad \curvearrowright \quad \vec{F}_{jk} = -\vec{F}_{kj}$



dann folgt

- Erhaltung des Gesamtimpulses

$$\vec{P} = \sum_j \vec{p}_j$$

denn:

$$\dot{\vec{P}} = \sum_j \dot{\vec{p}}_j = \sum_j \sum_{\substack{k \\ (k \neq j)}} \vec{F}_{jk} = \sum_{j \neq k} \vec{F}_{jk} = 0$$

\curvearrowright Schwerpunkt

$$\vec{R}_s = \frac{1}{M} \sum_j m_j \vec{r}_j \quad M = \sum_i m_i$$

bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit

$$\vec{V} = \frac{\vec{P}}{M}$$

- Erhaltung des Gesamtdrehimpulses

$$\vec{L} = \sum_j \vec{L}_j$$

geht genauso

$$\dot{\vec{L}} = 0$$

Zwei-Teilchen-System

$$\vec{r}_1, \vec{r}_2 \longrightarrow \vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{\underbrace{M}_{M=m_1+m_2}} \quad , \quad \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{r}_{12} \quad (3.32)$$

angenommen

$$\vec{F}_{12} = F(r_{12}) \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} = F(r) \vec{e}_r = \vec{F}(r) \quad (3.33)$$

Bewegungsgleichungen:

- Schwerpunktsbewegung \checkmark
- Relativbewegung:

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = \frac{1}{m_1} \vec{F}_{12} - \frac{1}{m_2} \vec{F}_{21} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \vec{F}(r)$$

$$\curvearrowright m \ddot{\vec{r}} = \vec{F}(r) \quad \text{mit} \quad \frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \quad (3.24)$$

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad \text{reduzierte Masse}$$

Rekonstruktion:

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{M} \vec{r}, \quad \vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{M} \vec{r} \quad (3.35)$$

Bsp. Planetenbewegung

4 Tensoren

4.1 Drehungen und Matrizen

Betrachte 2 Koordinatensysteme:

$$\begin{array}{l}
 \text{alt: } \{\vec{e}_i, \quad i = 1, 2, 3\} \\
 \\
 \text{neu: } \{\vec{f}_i \equiv \vec{e}'_i, \quad i = 1, 2, 3\}
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l}
 \vec{r} = \vec{e}_1 x + \vec{e}_2 y + \vec{e}_3 z \quad \doteq \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{r} \\
 = \\
 \vec{r} = \vec{f}_1 x' + \vec{f}_2 y' + \vec{f}_3 z' \quad \doteq \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \underline{r}'
 \end{array} \right.$$

seien vollständige Orthonormalsysteme (VONS)

Berechne Komponenten

$\underline{a}' = (a'_1, a'_2, a'_3)$ aus $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ für \vec{a} für eine Drehung $\{\vec{e}_i\} \xrightarrow{D} \{\vec{f}_i\}$:

$$\underline{a}' = \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{f}_1 \cdot \vec{a} \\ \vec{f}_2 \cdot \vec{a} \\ \vec{f}_3 \cdot \vec{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{f}_1 \cdot (\vec{e}_1 a_1 + \vec{e}_2 a_2 + \vec{e}_3 a_3) \\ \vec{f}_2 \cdot (\vec{e}_1 a_1 + \vec{e}_2 a_2 + \vec{e}_3 a_3) \\ \vec{f}_3 \cdot (\vec{e}_1 a_1 + \vec{e}_2 a_2 + \vec{e}_3 a_3) \end{pmatrix} \quad (4.1a)$$

$$= \begin{pmatrix} \left(\vec{f}_1 \cdot \vec{e}_1 \right) a_1 + \left(\vec{f}_1 \cdot \vec{e}_2 \right) a_2 + \left(\vec{f}_1 \cdot \vec{e}_3 \right) a_3 \\ \left(\vec{f}_2 \cdot \vec{e}_1 \right) a_1 + \left(\vec{f}_2 \cdot \vec{e}_2 \right) a_2 + \left(\vec{f}_2 \cdot \vec{e}_3 \right) a_3 \\ \left(\vec{f}_3 \cdot \vec{e}_1 \right) a_1 + \left(\vec{f}_3 \cdot \vec{e}_2 \right) a_2 + \left(\vec{f}_3 \cdot \vec{e}_3 \right) a_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \vec{f}_1 \cdot \vec{e}_1 & \vec{f}_1 \cdot \vec{e}_2 & \vec{f}_1 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{f}_2 \cdot \vec{e}_1 & \vec{f}_2 \cdot \vec{e}_2 & \vec{f}_2 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{f}_3 \cdot \vec{e}_1 & \vec{f}_3 \cdot \vec{e}_2 & \vec{f}_3 \cdot \vec{e}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = D \cdot \underline{a}$$

$$\text{mit } D = (D_{jk}) = \left(\vec{f}_j \cdot \vec{e}_k \right) \quad \text{Drehmatrix} \quad (4.1)$$

- definiert Anwendung von Matrix auf Spalten
Skalarprodukt „Zeile mal Spalte“
- ist linear:

$$\begin{aligned}
 D(\lambda \underline{a} + \mu \underline{b}) &= \lambda(D\underline{a}) + \mu(D\underline{b}) \\
 (\lambda D + \mu D')\underline{a} &= \lambda D\underline{a} + \mu D'\underline{a} \\
 \text{mit } (D + D')_{jk} &= D_{jk} + D'_{jk}
 \end{aligned}$$

4 Tensoren

- in D stehen beide Basissysteme:

$$D = \begin{pmatrix} \cdots & \underline{f_1} & \cdots \\ \cdots & \underline{f_2} & \cdots \\ \cdots & \underline{f_3} & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \underline{e_1} & \underline{e_2} & \underline{e_3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \quad \text{also: } \vec{f}_j = D_{jk} \vec{e}_k \quad (4.1')$$

in alter Basis in neuer Basis

kürzer in Index-Schreibweise:

$$a'_j = D_{jk} a_k \quad \text{mit} \quad \underbrace{D_{jk}}_{\text{Matrixelemente}} = \vec{f}_j \cdot \vec{e}_k = \cos \underbrace{\angle(\vec{f}_j, \vec{e}_k)}_{\varphi_{jk}} \quad (4.1'')$$

einfachster Fall: Drehung um x-Achse, Winkel φ

$$\vec{f}_1 = \vec{e}_1, \quad \vec{f}_2 = \vec{e}_2 \cos \varphi + \vec{e}_3 \sin \varphi, \quad \vec{f}_3 = -\vec{e}_2 \sin \varphi + \vec{e}_3 \cos \varphi$$

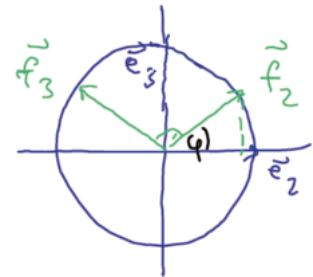
$$\begin{aligned} \vec{f}_1 \cdot \vec{e}_i &= \delta_{1i} \\ \vec{f}_2 \cdot \vec{e}_2 &= \cos \varphi = \vec{f}_3 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{f}_2 \cdot \vec{e}_3 &= \sin \varphi = -\vec{f}_3 \cdot \vec{e}_2 \\ \vec{f}_i \cdot \vec{e}_1 &= \delta_{i1} \end{aligned}$$

$$\leadsto D_{x,\varphi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & s \\ 0 & -s & c \end{pmatrix}$$

mit $c \equiv \cos \varphi$, $s \equiv \sin \varphi$ als Abkürzungen

zyklisch vertauschen $\rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow$

$$D_{y,\varphi} = \begin{pmatrix} c & 0 & -s \\ 0 & 1 & 0 \\ s & 0 & c \end{pmatrix}, \quad D_{z,\varphi} = \begin{pmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$



Zusammensetzung von Drehungen:

$$\begin{array}{c} \vec{a} : \quad \underline{a} \qquad \qquad \underline{a}' \qquad \qquad \underline{a}'' \\ \hline \{\vec{e}_j\} \xrightarrow{D^{(1)}} \{\vec{f}_k\} \xrightarrow{D^{(2)}} \{\vec{g}_l\} \\ \{\vec{e}_j\} \xrightarrow{D} \{\vec{g}_l\} \end{array}$$

$$\underline{a}'' = D^{(2)}\underline{a}' \quad \text{und} \quad \underline{a}' = D^{(1)}\underline{a} \quad \curvearrowright \quad \underline{a}'' = D^{(2)} \left[D^{(1)}\underline{a} \right] = \left[D^{(2)}D^{(1)} \right] \underline{a} =: D\underline{a}$$

in Elementen:

$$\begin{aligned} a''_l &= D^{(2)}_{lk} a'_k = D^{(2)}_{lk} D^{(1)}_{kj} a_j =: D_{lj} a_j, \quad \text{also:} \\ D_{lj} &= D^{(2)}_{lk} D^{(1)}_{kj} \quad \text{oder} \quad D = D^{(2)}D^{(1)} \end{aligned} \quad (4.3)$$

bildlich:

„Zeile \times Spalte“

$$\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Eigenschaften:

$$\begin{aligned} (\lambda A + \mu B) \cdot C &= \lambda A \cdot C + \mu B \cdot C, \quad (AB)C = A(BC) \\ A \cdot B &\neq B \cdot A \quad ! \quad \text{„Ring“} \end{aligned}$$

weitere Operationen mit Matrizen:

Transponieren: Spiegeln an der Diagonalen

$$(A^\top)_{jk} = A_{kj} \quad \text{i.a.} \quad A^\top \neq A, \quad (A^\top)^\top = A \quad (4.4)$$

Speziell: $A^\top = A$ „symmetrisch“ (6El.)

$A^\top = -A$ „antisymmetrisch“ (3El.)

jede Matrix: $A = \frac{1}{2} \underbrace{(A + A^\top)}_{sym} + \frac{1}{2} \underbrace{(A - A^\top)}_{antisym}, \quad (AB)^\top = B^\top A^\top \quad (4.5)$

Invertieren: Matrix-Operation rückgängig machen

„neutrale Operation“: $\underline{a}' = E\underline{a} \stackrel{!}{=} \underline{a} \quad \curvearrowright \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{1}$

Einheitsmatrix $E_{ij} = (\mathbf{1})_{ij} = \delta_{ij} \quad E \cdot A = A$

Inverses A^{-1} : $\underline{a}'' = A^{-1}\underline{a}' = A^{-1}A\underline{a} \stackrel{!}{=} \underline{a} \quad \curvearrowright \quad A^{-1}A = \mathbf{1} \quad (4.6)$

oder: $AA^{-1} = \mathbf{1}, \quad \text{und} \quad (A^{-1})^{-1} = A$

4 Tensoren

A^{-1} existiert nicht immer ! z.B. $N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ hat kein N^{-1}

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \quad (4.7)$$

weil $\mathbb{1} = AB \cdot (AB)^{-1} = A \underbrace{BB^{-1}} A^{-1} = A \mathbb{1} A^{-1} = \underbrace{AA^{-1}} \checkmark$

Determinante

$$\begin{aligned} |A| &= \det A = \varepsilon_{ijk} A_{1i} A_{2j} A_{3k} \\ &= A_{11} A_{22} A_{33} + A_{12} A_{23} A_{31} + A_{13} A_{21} A_{32} \\ &\quad - A_{13} A_{22} A_{31} - A_{11} A_{23} A_{32} - A_{12} A_{21} A_{33} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Spatprodukt der Zeilen oder der Spalten

Eigenschaften

- $|\lambda A| = \lambda^3 |A| \quad (4.9)$

- $|\mathbb{1}| = 1$

- $\left| \begin{pmatrix} d_1 & * & * \\ 0 & d_2 & * \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix} \right| = d_1 d_2 d_3$

- $|A|$ wechselt Vorzeichen bei Vertauschen zweier Zeilen oder Spalten
 $\curvearrowright |A| = 0$ falls zwei Zeilen oder Spalten zueinander proportional

- $\left| \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \underline{a} & \underline{b} & \underline{c} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \right| + \left| \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \underline{a'} & \underline{b} & \underline{c} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \underline{a + a'} & \underline{b} & \underline{c} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \right|$

- $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$ aber: $|A + B| \neq |A| + |B| \quad (4.10)$

- $|A^T| = |A| \quad (4.11)$

- $|A^{-1}| = |A|^{-1} \quad (4.12)$

Spur ("Trace")

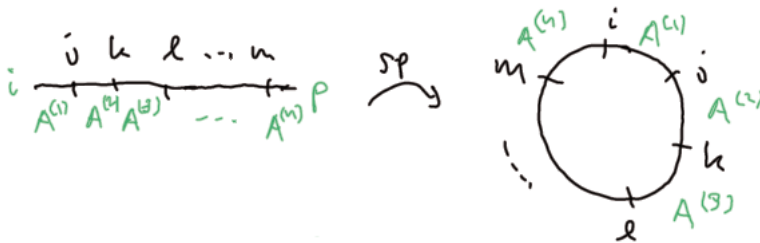
$$\text{sp}(A) = \delta_{ij} A_{ij} = A_{ii} = A_{11} + A_{22} + A_{33} \quad (4.13)$$

Eigenschaften:

- $$\text{sp}(AB) = \text{sp}(BA) \neq \text{sp}(A) \cdot \text{sp}(B) \quad (4.14)$$

- $$\text{sp}(A^{(1)}A^{(2)} \dots A^{(n)}) = \text{sp}(A^{(2)}A^{(3)} \dots A^{(n)}A^{(1)}) \quad \text{zyklisch}$$

weil $A_{ij}^{(1)} A_{jk}^{(2)} A_{kl}^{(3)} \dots A_{mp}^{(n)} = (A^{(1)}A^{(2)} \dots A^{(n)})_{ip}$
 $\rightarrow \text{sp}[A^{(1)}A^{(2)} \dots A^{(n)}] = A_{ij}^{(1)} A_{jk}^{(2)} A_{kl}^{(3)} \dots A_{mi}^{(n)}$



- $$\text{Sp}(\mathbf{1}) = 3$$

- $$\text{sp}(\lambda A) = \lambda \text{sp}(A) \quad (4.15)$$

- $$\text{sp}(A + B) = \text{sp}(A) + \text{sp}(B) \quad (4.16)$$

- $$\text{sp}(A^T) = \text{sp}(A) \quad (4.17)$$

4 Tensoren

Drehmatrizen sind speziell. Gegeben durch 3 Größen

- Wann ist eine Matrix eine Drehmatrix?
- Welche Beziehungen $D \rightleftharpoons \vec{n}, \varphi$ (Achse, Winkel) ?

$$\begin{aligned} \delta_{jl} &\stackrel{VONS}{=} \vec{f}_j \cdot \vec{f}_l \stackrel{(4.1')}{=} (D_{jk} \vec{e}_k) \cdot (D_{lm} \vec{e}_m) = D_{jk} D_{lm} \vec{e}_k \cdot \vec{e}_m \\ &= D_{jk} D_{lm} \delta_{km} = D_{jk} D_{lk} = D_{jk} (D^\top)_{kl} = (DD^\top)_{jl} \\ &\curvearrowright \left. \begin{aligned} DD^\top &= \mathbb{1} \quad \text{„Orthogonalität“} \\ \Leftrightarrow D^\top D &= \mathbb{1} \Leftrightarrow D^{-1} = D^\top \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (4.18)$$

man sagt: $D \in O(3)$ „orthogonale 3x3 Matrizen“
damit gilt:

$$\underline{a} = D^\top \underline{a}' \quad \text{mit} \quad (D^\top)_{jk} = \vec{e}_j \cdot \vec{f}_k \Leftrightarrow a_j = (D^\top)_{jk} a'_k = a'_k D_{kj} \quad (4.19)$$

\curvearrowright Rechtsmultiplikation der Zeile $\underline{a}^\top = (a_1, a_2, a_3)$ mit D :

$$\underline{a}^\top = (D^\top \underline{a}')^\top = \underline{a}'^\top \cdot D \quad (4.19')$$

$$\text{Basisvektoren:} \quad \vec{e}_j = (D^\top)_{jk} \vec{f}_k = \vec{f}_k D_{kj} \quad (4.20)$$

Skalarprodukt ist drehinvariant

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \underline{a}^\top \underline{b} \xrightarrow{D} \underline{a}'^\top \underline{b}' = (D\underline{a})^\top (D\underline{b}) = \underline{a}'^\top \underbrace{D^\top D}_{\mathbb{1}} \underline{b} = \underline{a}'^\top \underline{b}$$

$$\vec{a} = \vec{e}_j a_j = \vec{f}_k D_{kj} a_j = \vec{f}_k a'_k = \vec{a}$$

Komponenten & Basisvektoren drehen „kontragradient“
eine Drehmatrix hat 3 unabhängige Parameter

Determinante einer Drehmatrix:

$$1 = \det(\mathbb{1}) = \det(DD^\top) = \det D \cdot \det D^\top = (\det D)^2$$

$$\det D = +1 \quad (\text{Drehung}) \quad \text{oder} \quad = -1 \quad (\text{Drehspiegelung}) \quad (4.21)$$

Spiegelung, z.B. $S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ Punktspiegelung am Ursprung

jede Drehspiegelung lässt sich schreiben als $S \cdot D$
mit $\det D = +1$. Also



- Drehachse \vec{n} aus D

$$D \cdot \underline{n} = \underline{n} \quad \text{Spezialfall eines Eigenwert-Problems} \quad (4.22)$$

$$\Leftrightarrow (D - \mathbf{1}) \cdot \underline{b} = 0 \quad , \text{normiere } \underline{n} = \underline{b}/b$$

dafür muß $\det(D - \mathbf{1}) = 0$ sein.

Beispiel:

$$D = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$0 = (D - \mathbf{1}) \cdot \underline{b} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -b_1 + b_2 + \sqrt{2}b_3 \\ b_1 - b_2 - \sqrt{2}b_3 \\ \sqrt{2}b_1 + \sqrt{2}b_2 - 2b_3 \end{pmatrix}$$

Zeile 1 und 2 linear abhängig \curvearrowright 2 unabhängige Gleichungen

$$2 \text{ Gln: } \begin{cases} b_1 - b_2 - \sqrt{2}b_3 = 0 \\ -b_1 + b_2 - \sqrt{2}b_3 = 0 \end{cases} \curvearrowright \begin{cases} b_3 = 0 \\ b_1 = b_2 \end{cases} \curvearrowright \underline{b} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \curvearrowright \underline{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Drehwinkel φ aus D (hier: nur $\cos \varphi$)

$$D_{\vec{n}, \varphi} = D_0^T D_{z, \varphi} D_0 \quad \text{wobei } D_0 : \vec{n} \rightarrow \vec{e}_z \text{ dreht}$$

$$\begin{aligned} \text{sp}(D_{\vec{n}, \varphi}) &= \text{sp}(D_0^T D_{z, \varphi} D_0) = \text{sp}(D_0 D_0^T D_{z, \varphi}) = \text{sp}(\mathbf{1} \cdot D_{z, \varphi}) = \text{sp}(D_{z, \varphi}) \\ \text{sp}(D_{\vec{n}, \varphi}) &= 1 + 2 \cos \varphi \end{aligned} \quad (4.23)$$

Rekonstruktion von D aus \vec{n} & φ

$$\vec{n} \doteq (u, v, w) \quad c = \cos \varphi \quad s = \sin \varphi$$

$$\begin{aligned} D &= \cos \varphi \cdot \mathbf{1} + (1 - \cos \varphi) \cdot (\underline{n} \circ \underline{n}) - \sin \varphi \cdot (\underline{n} \times \dots) \\ &\doteq c \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + (1 - c) \cdot \begin{bmatrix} u^2 & uv & uw \\ vu & v^2 & vw \\ wu & wv & w^2 \end{bmatrix} - s \cdot \begin{bmatrix} 0 & -w & v \\ w & 0 & -u \\ -v & u & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.24)$$

Beweis: (4.24) gilt in speziellem Bezugssystem; z.B. $\vec{n} = \vec{e}_z$:

$$D_{z, \varphi} = c \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + (1 - c) \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - s \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bemerkung: engere Physiker-Definition von Vektoren präzise:

$$\begin{aligned} \vec{a} = \vec{e}_i a_i \quad \text{heißt Vektor} \quad \Leftrightarrow a'_j = D_{jk} a_k \quad \text{unter Drehung} \\ \{\vec{e}_i\} \rightarrow \{\vec{f}_j = D_{jk} \vec{e}_k\} \end{aligned} \quad (4.25)$$

4.2 Tensor-Begriff

	Komponenten		Objekte
Zahl	a		Skalar a (Tensor 0-ter Stufe)
Tripel	$\underline{a} = (a_i) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ Spalte $\underline{a}^T = (a_1, a_2, a_3)$ Zeile		Vektor $\vec{a} = \vec{e}_i a_i$ (Tensor 1. Stufe)
Matrix	$A = (A_{ij}) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$		Tensor $\hat{A} = \hat{e}_{ij} A_{ij}$ (2. Stufe)
Schema	$T = (T_{j_1 j_2 \dots j_n})$		Tensor $\hat{T} = \hat{e}_{j_1 j_2 \dots j_n} T_{j_1 j_2 \dots j_n}$ (n-ter Stufe)

allg. Definition: Schema $(T_{j_1 j_2 \dots j_n})$ definiert einen Tensor n-ter Stufe

$$\hat{T} \doteq (T_{j_1 \dots j_n}) \Leftrightarrow T'_{j_1 j_2 \dots j_n} = D_{j_1 k_1} D_{j_2 k_2} \dots D_{j_n k_n} T_{k_1 k_2 \dots k_n} \quad (4.26)$$

unter Drehung $\{\vec{e}_i\} \rightarrow \{\vec{f}_j = D_{jk} \vec{e}_k\}$

Kurzschreibweise:

$$T' = D \cdot D \dots D \cdot T$$

Invarianz des Tensors:

$$\begin{aligned} \hat{T} &= \hat{e}_{j_1 \dots j_n} T_{j_1 \dots j_n} \\ &= \hat{f}_{k_1 \dots k_n} T_{k_1 \dots k_n} \end{aligned}$$

kann Tensor \hat{A} als Abbildung interpretieren:

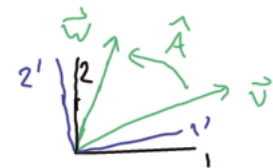
$$w_j = A_{jk} v_k \quad \text{soll als aktive Operation}$$

$$\hat{A} : \vec{v} \mapsto \vec{w} = \hat{A} \cdot \vec{v} \quad \text{gelesen werden}$$

also $\hat{A} \doteq (A_{jk})$ im VONS $\{\vec{e}_i\}$

dann liegt $\hat{A} \doteq (A'_{jk})$ im gedrehten VONS $\{\vec{f}_j\}$ fest:

$$w'_j = A'_{jk} v'_k$$



ausgeschrieben:

$$\begin{aligned} w'_j &= D_{jl} w_l = D_{jl} A_{lk} v_k = D_{jl} A_{lk} (D^T)_{km} v'_m \\ &= (D_{jl} D_{mk} A_{lk}) v'_m \stackrel{!}{=} A'_{jm} v'_m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \curvearrowright A'_{jm} &= D_{jl} D_{mk} A_{lk} = D_{jl} A_{lk} (D^\top)_{km} \Leftrightarrow A' = D A D^\top \\ \curvearrowright & \qquad \qquad \qquad \text{sp}(A') = \text{sp}(A) \quad \& \quad \det(A') = \det(A) \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\curvearrowright \underline{w}' = A' \cdot \underline{v}' = D A \underbrace{D^\top \cdot D}_{\text{Kovarianz}} \underline{v} = D A \cdot \underline{v} = D \underline{w}$$

Matrix A definiert auch eine Bilinearform:

$$B(\vec{u}, \vec{v}) = \underline{u}^\top \cdot A \cdot \underline{v} = u_j A_{jk} v_k = \vec{u} \cdot \hat{A} \cdot \vec{v} \quad (4.28)$$

vertauschen der Argumente liefert B von A^\top :

$$B(\vec{v}, \vec{u}) = \underline{v}^\top \cdot A \cdot \underline{u} = (A^\top \underline{v})^\top \cdot \underline{u} = \underline{u}^\top \cdot (A^\top \underline{v}) = \underline{u}^\top \cdot A^\top \underline{v}$$

bei gleichen Argumenten ($\vec{v} = \vec{u}$) ergibt sich eine quadratische Form:

$$Q(\vec{u}) = B(\vec{u}, \vec{u}) = \vec{u} \cdot \hat{A} \cdot \vec{u} = \underline{u}^\top \cdot A \cdot \underline{u} = u_j A_{jk} u_k$$

hierbei überlebt nur der symmetrische Teil $\frac{1}{2}(A + A^\top)$.

Dyadisches Produkt / Tensorprodukt

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \text{Tensor 2. Stufe} = \text{„Operator“} \quad (\text{Dyade})$$

speziell: $\det = 0$, $\text{sp} = \vec{a} \cdot \vec{b}$

$$\text{Def.:} \quad (\vec{a} \circ \vec{b})_{ij} = a_i b_j \quad (4.29)$$

$$\vec{a} \circ \vec{b} \doteq \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix} = \underline{a} \cdot \underline{b}^\top = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \cdot (\cdot \cdot \cdot)$$

Wirkung auf Vektoren:

$$(\vec{a} \circ \vec{b})_{ij} c_j = a_i b_j c_j \quad \Leftrightarrow (\vec{a} \circ \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} (\vec{b} \cdot \vec{c}) \quad (4.29')$$

zerlege

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \frac{1}{2} (\vec{a} \circ \vec{b} + \vec{b} \circ \vec{a}) + \frac{1}{2} (\vec{a} \circ \vec{b} - \vec{b} \circ \vec{a})$$

antisym. Teil enthält das Kreuzprodukt $\vec{\omega} = \vec{a} \times \vec{b}$

$$\vec{a} \circ \vec{b} - \vec{b} \circ \vec{a} \doteq \begin{pmatrix} 0 & a_1 b_2 - a_2 b_1 & a_1 b_3 - a_3 b_1 \\ a_2 b_1 - a_1 b_2 & 0 & a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 & a_3 b_2 - a_2 b_3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix} \doteq -\vec{\omega} \times \dots$$

4 Tensoren

wegen Wirkung auf Vektor:

$$\begin{aligned} (\vec{a} \circ \vec{b} - \vec{b} \circ \vec{a}) \cdot \vec{c} &\doteq \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \doteq -\vec{\omega} \times \vec{c} \\ \parallel \quad (4.29') & \qquad \qquad \qquad \parallel \qquad \qquad \vec{\omega} = \vec{a} \times \vec{b} \end{aligned}$$

$$\vec{a} (\vec{b} \cdot \vec{c}) - \vec{b} (\vec{a} \cdot \vec{c}) \quad \leftarrow \text{„BAC-CAB“} \rightarrow \quad -(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \quad (4.30)$$

$$(\vec{a} \circ \vec{b} - \vec{b} \circ \vec{a})_{ij} = a_i b_j - a_j b_i = \varepsilon_{ijk} (\vec{a} \times \vec{b})_k \quad (4.30')$$

Spezielle Tensoren

•

$$\hat{e}_{ij} = \vec{e}_i \circ \vec{e}_j \doteq \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 1_{ij} & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{weil} \quad (\hat{e}_{ij})_{kl} = (\vec{e}_i)_k (\vec{e}_j)_l = \delta_{ik} \delta_{jl} \quad (4.31)$$

$$\text{ist Basis: } \hat{A} = \hat{e}_{ij} a_{ij} \doteq a_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \dots + a_{33} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Produkte: } \hat{e}_{ij} \cdot \vec{e}_k = (\vec{e}_i \circ \vec{e}_j) \cdot \vec{e}_k = \vec{e}_i (\vec{e}_j \cdot \vec{e}_k) = \vec{e}_i \delta_{jk}$$

damit von Objekten zu Komponenten, z.B. $\vec{w} = \hat{A} \cdot \vec{v}$:

$$\vec{e}_j w_j = \hat{e}_{jk} A_{jk} \cdot \vec{e}_i v_i = \vec{e}_j \delta_{kl} A_{jk} v_l = \vec{e}_j \underline{A_{jl}} v_l \rightsquigarrow w_j = A_{jl} v_l$$

• $\hat{e}_{j_1 j_2 \dots j_n} = \vec{e}_{j_1} \circ \vec{e}_{j_2} \circ \dots \circ \vec{e}_{j_n}$ n-fache Dyade

• $\mathbf{1} = \hat{e}_{ij} \delta_{ij} = \hat{f}_{ij} \delta_{ij} \Leftrightarrow \delta'_{ij} = \delta_{ij}$ dreh-invariant

$\rightsquigarrow \mathbf{1}$ ist ein drehinvarianter Tensor

$\rightsquigarrow sp(A) = \delta_{ij} A_{ji} = A_{ii}$ drehinvariant

• $\hat{\varepsilon} = \hat{e}_{ijk} \varepsilon_{ijk} = \hat{f}_{ijk} \varepsilon_{ijk} \Leftrightarrow \varepsilon'_{ijk} = \varepsilon_{ijk}$ dreh-invariant

$\rightsquigarrow \hat{\varepsilon}$ ist ein drehinvarianter Tensor (3. Stufe)

$\rightsquigarrow det(A) = \varepsilon_{ijk} A_{1i} A_{2j} A_{3k}$ drehinvariant

ε -Tensor vermittelt zwischen Vektor & antisym. Tensor

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon} : \vec{a} &\mapsto \hat{A} \quad \text{wegen} \quad A_{ij} = \varepsilon_{ijk} a_k \quad \Leftrightarrow \quad \hat{A} = \hat{\varepsilon} \cdot \vec{a} \\ \text{und } \hat{A} &\mapsto \vec{a} \quad \text{wegen} \quad a_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} A_{jk} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} = \frac{1}{2} \hat{\varepsilon} : \hat{A} \end{aligned} \quad (4.32)$$

4.3 Hauptachsen-Transformation

Beh.: zu einer symmetrischen Matrix $H = H^T$ gibt es mindestens eine Drehmatrix D , so dass

$$H' = DHD^T = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \doteq \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

ausgeschrieben:

$$DHD^T = \begin{pmatrix} \dots & \underline{f_1^T} & \dots \\ \dots & \underline{f_2^T} & \dots \\ \dots & \underline{f_3^T} & \dots \end{pmatrix} H \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \underline{f_1} & \underline{f_2} & \underline{f_3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \underline{f_1^T} & \dots \\ \dots & \underline{f_2^T} & \dots \\ \dots & \underline{f_3^T} & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ H\underline{f_1} & H\underline{f_2} & H\underline{f_3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{f_1^T} H \underline{f_1} & \dots \\ \underline{f_2^T} H \underline{f_1} & \dots \\ \underline{f_3^T} H \underline{f_1} & \dots \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \widehat{H} \vec{f}_j = \underbrace{\lambda_j}_{\text{Eigenwert(EW)}} \underbrace{\vec{f}_j}_{\text{Eigenvektor(EV)}} \quad \text{mit} \quad \vec{f}_i \cdot \vec{f}_j = \delta_{ij} \quad \text{Eigenwertproblem} \quad (4.33)$$

\exists von den Eigenwerten und den Eigenvektoren jeweils drei ($j=1, 2, 3$)

Beweis

- A) Beträge der Eigenvektoren liegt nicht fest \rightarrow kann normieren
- B) EW verschieden \Rightarrow EV orthogonal:

$$\left. \begin{aligned} \widehat{H} \vec{f}_1 &= \lambda_1 \vec{f}_1 \\ \widehat{H} \vec{f}_2 &= \lambda_2 \vec{f}_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 0 = \vec{f}_2 \cdot (\widehat{H} \vec{f}_1 - \lambda_1 \vec{f}_1) = (\widehat{H}^T \vec{f}_2) \cdot \vec{f}_1 - \lambda_1 \vec{f}_2 \cdot \vec{f}_1 = (\lambda_2 - \lambda_1) \vec{f}_2 \cdot \vec{f}_1$$

(q.e.d.)

- C) EW sind Lösungen einer kubischen Gleichung:

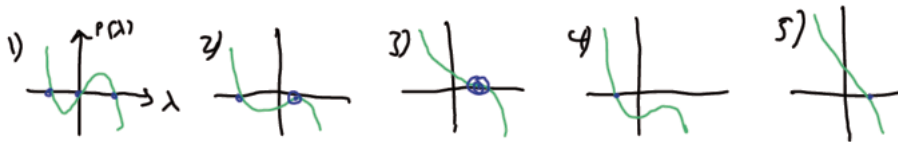
$$(\widehat{H} - \lambda \mathbb{1}) \cdot \vec{f} = 0 \quad \text{hat Lösungen ungleich } \vec{f} = 0 \text{ genau wenn}$$

$$\det(H - \lambda \mathbb{1}) = 0 \quad \curvearrowright \text{ liefert } \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$$

gesucht sind die Nullstellen des „charakteristischen Polynoms“

$$P(\lambda) = \det(H - \lambda \mathbb{1}) = \begin{vmatrix} H_{11} - \lambda & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & H_{22} - \lambda & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + (\text{sp } H) \lambda^2 + q(H) \lambda + \det H \quad (4.34)$$

5 mögliche Fälle



4 Tensoren

D) für $H = H^T$ treten nur Fälle 1-3 auf

E) bei Entartungen (Fälle 2 & 3) sind 2 EW gleich, z.B. $\lambda_1 = \lambda_2 = \bar{\lambda}$

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{H}\vec{f}_1 = \bar{\lambda}\vec{f}_1 \\ \widehat{H}\vec{f}_2 = \bar{\lambda}\vec{f}_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{H}(\alpha\vec{f}_1 + \beta\vec{f}_2) = \alpha\bar{\lambda}\vec{f}_1 + \beta\bar{\lambda}\vec{f}_2 = \bar{\lambda}(\alpha\vec{f}_1 + \beta\vec{f}_2)$$

\curvearrowright jede Kombination $\alpha\vec{f}_1 + \beta\vec{f}_2$ ist EV $\curvearrowright \exists$ „Eigen-Ebene“ q.e.d.

Fahrplan zur Hauptachsen-Transformation

1) $H = H^T$?

2) löse $\det(H - \lambda\mathbb{1}) = 0$ nach λ ; sortiere $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$; Entartung?

3) Proben: $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \text{sp}(H)$; $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \det(H)$

4) zu jedem EW λ_j lösen

$$(H - \lambda_j\mathbb{1})\underline{v}_j = 0 \quad \text{nach} \quad \underline{v}_j \curvearrowright \{\vec{v}_j\} \text{ EV}$$

[kann eine nicht null Komponente von \underline{v}_j frei wählen]

5) Probe der Orthogonalität:

$$\vec{v}_j \cdot \vec{v}_k = 0 \quad \text{für } j \neq k \quad | \text{ shortcut: } \vec{f}_3 = \vec{f}_1 \times \vec{f}_2$$

bei Entartung: orthogonale Linearkombination wählen

6) normiere die EV: $\vec{f}_j = \vec{v}_j/v_j$

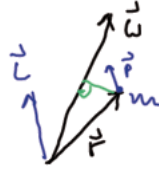
wechsele evtl. ein Vorzeichen ($\vec{f}_3 \rightarrow -\vec{f}_3$) so dass Rechtssystem

7) notiere Resultat in Form

$$H' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad \& \quad D = \begin{pmatrix} -\underline{f}_1 & - \\ -\underline{f}_2 & - \\ -\underline{f}_3 & - \end{pmatrix}$$

Beispiel C) Trägheitstensor

starrer Körper, Masse m , feste Achse $\vec{\omega}$ durch Ursprung, wird in festem Abstand von Achse gehalten (masselose Drähte)



$$\begin{aligned}\vec{L} &= \vec{r} \times m \overbrace{(\vec{\omega} \times \vec{r})}^{\vec{v}} = m (\vec{\omega} r^2 - \vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{\omega})) \\ &= m (r^2 \mathbb{1} - \vec{r} \circ \vec{r}) \cdot \vec{\omega} =: \hat{I} \cdot \vec{\omega}\end{aligned}\quad (4.38)$$

definiert Trägheitstensor \hat{I} , mit Komponenten

$$\begin{aligned}I_{jk} &= m (r^2 \delta_{jk} - r_j r_k) \quad \text{oder} \\ I &= mr^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - m \begin{pmatrix} xx & xy & xz \\ yx & yy & yz \\ zx & zy & zz \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & z^2 + x^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{pmatrix} = I^T\end{aligned}\quad (4.39)$$

für mehrere Massen $m_\alpha, \alpha = 1, \dots, N$:

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \sum_\alpha \vec{L}_\alpha = \sum_\alpha \hat{I}_\alpha \vec{\omega} =: \hat{I} \vec{\omega}, \quad \text{also} \\ I &= \sum_\alpha m_\alpha \begin{pmatrix} y_\alpha^2 + z_\alpha^2 & -x_\alpha y_\alpha & -x_\alpha z_\alpha \\ -x_\alpha y_\alpha & z_\alpha^2 + x_\alpha^2 & -y_\alpha z_\alpha \\ -x_\alpha z_\alpha & -y_\alpha z_\alpha & x_\alpha^2 + y_\alpha^2 \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (4.40')$$

Zeitabhängigkeit von $\vec{r} \rightarrow$ Zeitabhängigkeit von \hat{I} ,
damit $\dot{\vec{L}} = \dot{\hat{I}} \cdot \vec{\omega} + \hat{I} \cdot \dot{\vec{\omega}} = \vec{r} \times \dot{\vec{F}} =: \vec{N}$ Drehmoment \curvearrowright Unwucht
Ausnahme: $\vec{\omega}$ ist ein Eigenvektor von \hat{I} ,

$$\vec{L} = \hat{I} \vec{\omega} = \lambda \vec{\omega} \quad (4.40)$$

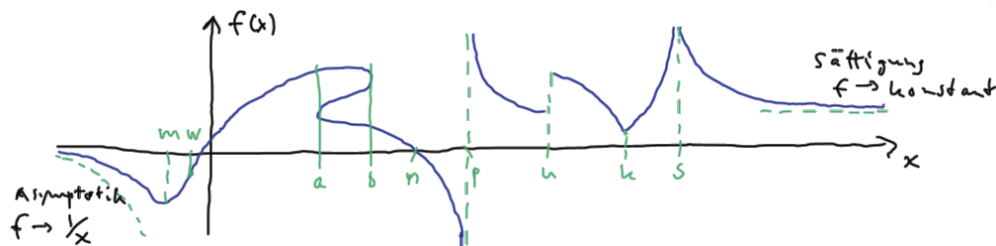
„Auswuchten“

5 Funktionen

5.1 Allgemeines

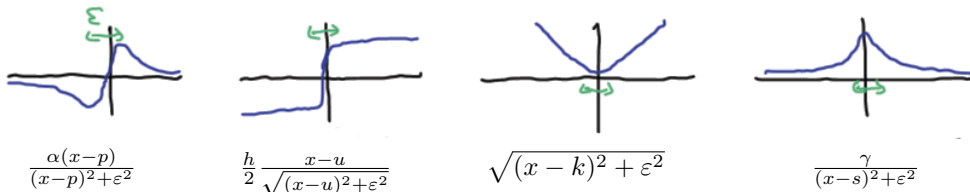
Funktionen sind Abbildungen, in der Regel zwischen Kontinua

einfachster Fall: $f : \mathbb{R} \supseteq D \rightarrow W \subseteq \mathbb{R}$ „von \mathbb{R} nach \mathbb{R} “



m Minimum, w Wendepunkt, $[a, b]$ mehrdeutig, n Nullstelle, p Pol (einfacher), u Sprungstelle, k Knick, s Singularität

pathologische Stellen sind „in der Natur“ bei höherer „Auflösung“ regulär:



verwandte Funktionen

$f_1(x) = f(-x)$	an y-Achse gespiegelt	} Graph
$f_2(x) = -f(x)$	an x-Achse gespiegelt	
$f_3(x) = -f(-x)$	am Ursprung gespiegelt	
$f_4(x) = f(x - a)$	um a nach <u>rechts</u> verschoben	
$f_5(x) = f(x) + b$	um b nach <u>oben</u> verschoben	
$f_6(x) = f(c \cdot x)$	mit $\frac{1}{c}$ -facher x-Streckung	
$f_7(x) = d \cdot f(x)$	mit d -facher y-Streckung	

gerade Funktionen: $f(-x) = f(x)$ Bsp: $\frac{1}{1+x^2}$
 ungerade Funktionen: $f(-x) = -f(x)$ Bsp: $\tan x$

5 Funktionen

zum Entfernen physikalischer Dimensionen

Funktion $z(t)$, t & z haben Dimension. Wähle typische Konstanten t_0, z_0

definiere: $f = z/z_0, \tau = t/t_0$ dim.-los $\curvearrowright z(t) = z_0 f(\tau = t/t_0)$

Bsp. freier Fall: $z(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$. Natürlich ist $z_0 = h, t_0 = \sqrt{h/g}$

$\curvearrowright z(t) = h \left[1 - \frac{1}{2}g\frac{t^2}{h} \right] = h \left[1 - \frac{1}{2}(t/t_0)^2 \right] = h \cdot f(\tau)$ mit $f(\tau) = 1 - \frac{1}{2}\tau^2$

Newton: $\ddot{z} = -g, z(0) = h, \dot{z}(0) = 0 \curvearrowright f'' = -1, f(0) = 1, f'(0) = 0$.

Umkehrfunktionen

$$f^{-1} \text{ definiert über } \underbrace{f^{-1}(f(x)) = x}_x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{f^{-1}} x \quad \text{oder} \quad \underbrace{f(f^{-1}(x)) = x}_y \xrightarrow{f^{-1}} x \xrightarrow{f} y \quad (5.1)$$

Graph von f^{-1} aus Graph von f durch Spiegelung an Diagonalen $y = x$

Die Ableitung von f^{-1} erhält man aus Ableitung von f :

$$\partial_x \left[\underbrace{f^{-1}(f(x)) = x}_y \right] \xrightarrow{\text{Kettenregel}} \partial_y f^{-1}(y) \cdot \partial_x f(x) = \partial_x x = 1 \quad , \text{also:}$$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \quad \text{oder} \quad \frac{dx}{dy} = \left[\frac{dy}{dx} \right]^{-1} \quad (5.2)$$

Beispiele:

A) $f(x) = x^2 = y \curvearrowright f^{-1}(y) = \sqrt{y} = x$ (positiver Ast)

$$\text{Teste(5.2): } \partial_y \sqrt{y} = \frac{1}{(\partial_x x^2) \Big|_{x=\sqrt{y}}} = \frac{1}{(2x) \Big|_{x=\sqrt{y}}} = \frac{1}{2\sqrt{y}} \quad \checkmark$$

B) $f(x) = \sin x = y \curvearrowright f^{-1}(y) = \arcsin y = x$

$$\partial_y \arcsin y = \frac{1}{(\partial_x \sin x) \Big|_{x=\arcsin y}} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x} \Big|_{x=\arcsin y}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

5.2 Die Exponentialfunktion

beschreibt alle Wachstumsvorgänge, wenn:

Mengenänderung ist proportional zur Menge selbst

etwa: Bakterien-Anzahl $N(t)$ nehme zu gemäß $\dot{N} = \alpha N$

AW: $N(0) = N_0$ gegeben $\xrightarrow{N=N_0 f} \frac{1}{\alpha} \partial_t(N_0 f) = N_0 f$

mache dimensionslos: $x = \alpha t, f = f(x) \rightsquigarrow f'(x) = f(x), f(0) = 1$

Def:

$$\exp(x) \text{ löst die Differentialgleichung } f'(x) = f(x) \text{ mit } f(0) = 1 \quad (5.3)$$

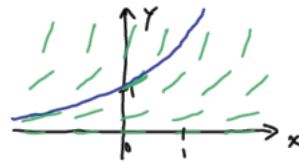
Graph:

trage Steigung am Punkt (x, y) ein:

exp monoton steigend, $D = \mathbb{R}, W = \mathbb{R}_+$

exp immer positiv ($f(x_0) = 0 \rightsquigarrow f(x) = 0$)

$\lim_{x \rightarrow \infty} \exp(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$



Funktionalgleichung:

betrachte Hilfsfunktion $g(x) = \exp(x + z)$

$g'(x) = \exp(x + z) = g(x)$, aber $g(0) = \exp(z)$, also:

$$g(x) = \exp(z) \cdot \exp(x) \rightsquigarrow \exp(y + z) = \exp(x) \cdot \exp(z) \quad (5.4)$$

Iteration von (5.4):

$$\exp(x) = \exp\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \left[\exp\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2$$

$$\left. \begin{aligned} \exp(x) &= \exp\left(\frac{x}{n} + \frac{x}{n} + \dots + \frac{x}{n}\right) = \left[\exp\left(\frac{x}{n}\right)\right]^n \\ \exp(1) &= \left[\exp\left(\frac{1}{m}\right)\right]^m = \left[\exp\left(\frac{x}{n}\right)\right]^{\frac{n}{x}} \end{aligned} \right\} \exp(x) = \left[\exp(1)\right]^x$$

$$\rightsquigarrow \exp(x) = e^x \quad \text{mit } e := \exp(1) \approx 2,71828\dots \quad \text{Euler-Zahl} \quad (5.5)$$

$$\rightsquigarrow \exp(-x) = e^{-x} = 1/e^x = 1/\exp(x)$$

$$\rightsquigarrow \partial_x e^x = e^x \quad \rightsquigarrow \quad \partial_x^2 e^{\pm x} = e^{\pm x}, \quad \partial_x^n e^{\gamma x} = \gamma^n e^{\gamma x} \quad (5.6)$$

Reihe:

versuche $f' = f$ per Polynom-Ansatz zu lösen: $f \stackrel{?}{=} 1 + c_1 x + c_2 x^2$

$\rightsquigarrow f' = c_1 + 2c_2 x \stackrel{!}{=} 1 + c_1 x + c_2 x^2 = f$ geht nicht

\rightsquigarrow addiere beliebig viele Potenzen, d.h. Polynom \rightarrow Potenzreihe

5 Funktionen

$$f(x) \stackrel{?}{=} 1 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad (c_0 = 1)$$

einsetzen:

$$\begin{aligned} f' &= c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + \dots \\ &\stackrel{!}{=} 1 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots = f \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich:

$$nc_n = c_{n-1} \quad \Leftrightarrow \quad c_n = \frac{c_{n-1}}{n}$$

eleganter:

$$f'(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_n n x^{n-1} \stackrel{!}{=} \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m \stackrel{m=n-1}{=} \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^{n-1} = f$$

→ Rekursion zu Koeffizientenvergleich

Lösung:

$$c_n = \frac{1}{n} c_{n-1} = \frac{1}{n} \frac{1}{n-1} c_{n-2} = \frac{1}{n} \frac{1}{n-1} \frac{1}{n-2} c_{n-3} = \dots = \frac{1}{n!} c_0$$

also:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \quad (5.7)$$

$$0! = 1$$

Test:

$$\partial_x e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} \stackrel{n-1=m}{=} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} x^m = e^x \quad \checkmark$$

Konvergenz? überall, d.h. $\forall x \in \mathbb{R}$

Asymptotik:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x / x^n = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^n e^{-x} = 0 \quad (5.8)$$

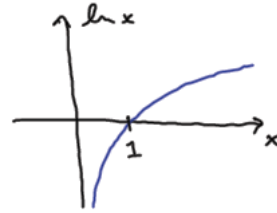
Produktdarstellung:

$$\begin{aligned} e^x &= \left(e^{\frac{x}{n}} \right)^n \stackrel{\varepsilon = \frac{x}{n}}{=} (e^\varepsilon)^n = \left(\underbrace{1 + \varepsilon + O(\varepsilon^2)} \right)^n = (1 + \varepsilon)^n + O(n \varepsilon^2) \\ &\rightarrow e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n \end{aligned} \quad (5.9)$$

Umkehrfunktion:

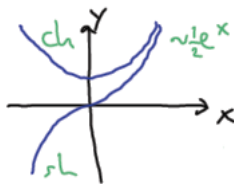
$$f^{-1}(y) = \ln y \quad \text{zu} \quad y = f(x) = e^x > 0$$

Eigenschaften:



$$\begin{aligned}
 e^{\ln x} &= x, \quad \ln e^x = x \\
 \partial_y \ln y &= \frac{1}{\partial_x e^x |_{x=\ln y}} = \frac{1}{e^x |_{x=\ln y}} = \frac{1}{y} \\
 \ln(xy) &= \ln(e^{\ln x} e^{\ln y}) = \ln(e^{\ln x + \ln y}) = \ln x + \ln y \\
 \ln(x^a) &= \ln(e^{a \ln x}) = a \ln x \\
 \partial_x a^x &= \partial_x (e^{x \ln a}) = \ln a \cdot e^{x \ln a} = \ln a \cdot a^x \\
 \ln \frac{1}{x} &= -\ln x, \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0, \\
 \lim_{x \rightarrow \infty} \ln x &= \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty
 \end{aligned}
 \tag{5.10}$$

verwandte Funktionen:



$$\begin{aligned}
 \cosh x \equiv \text{ch } x &= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) && \text{gerade} \\
 \sinh x \equiv \text{sh } x &= \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) && \text{ungerade}
 \end{aligned}
 \tag{5.11}$$

Eigenschaften:

$$\begin{aligned}
 e^x &= \text{ch } x + \text{sh } x \\
 \text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x &= 1 \\
 \partial_x \text{sh } x &= \text{ch } x \\
 \partial_x \text{ch } x &= \text{sh } x
 \end{aligned}$$

5.3 Potenzreihen

Exp-Funktionen war Beispiel einer Potenzreihe

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \text{mit} \quad c_n = \frac{1}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Def.: Potenzreihe ist eine formale Summe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n =: p_{\infty}(x)$
 Eigenschaften:

- Konvergenz? falls $|\sum_{n=k}^l c_n x^n| < \varepsilon$ für $\forall k, l > N(\varepsilon)$
- Approximation einer Funktion $f(x)$ [auch ohne Konvergenz]

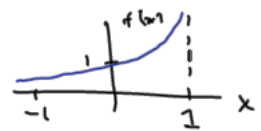
$$f(x) = \sum_{n=0}^N c_n x^n + R_{N+1}(x) \quad R_{N+1} \text{ heißt Restglied, von } O(x^{N+1})$$

nur gut falls $f(x)$ nicht pathologisch bei $x = 0$

- Darstellung einer Funktion über Potenzreihenansatz,
z.B. für Lösen von Differentialgleichungen.

zweites und wichtigstes Beispiel: geometrische Reihe $f(x) = \frac{1}{1-x}$
 erfinde Gleichung für diese Funktion

a) $f'(x) = \frac{-1}{(1-x)^2} \cdot (-1) = \frac{1}{(1-x)^2} \rightsquigarrow (1-x)f'(x) = f(x)$
mit $f(0)=1$



b) $f(x) = \frac{1}{1-x} \rightsquigarrow (1-x) \cdot f(x) = 1$ algebraisch

setze Potenzreihenansatz $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ ein!
 in b):

$$\begin{aligned} 1 &= (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (1-x)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n x^n - c_n x^{n+1}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n - \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+1} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^n \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n - c_{n-1}) x^n \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich:

$$1 = c_0, \quad 0 = c_n - c_{n-1} \text{ für } n \geq 1 \rightsquigarrow c_n = 1 \quad \forall n$$

Ergebnis:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{konv. für } |x| < 1 \quad (5.12)$$

Approximation $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^N + R_{N+1}(x)$

Restglied durch „Abspalten“:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= 1 + x \cdot \frac{1}{1-x} = 1 + x \cdot \left(1 + x \frac{1}{1-x}\right) = \dots = 1 + x + x^2 + \dots + x^N + \frac{x^{N+1}}{1-x} \\ &\leadsto \sum_{n=0}^N x^n = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{N+1}}{1-x} = \frac{1-x^{N+1}}{1-x} \end{aligned} \quad (5.13)$$

Tricks, wie man sich Potenzreihenentwicklungen besorgt:

- Einsetzen:

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 \pm \dots$$

- Umformen: $\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

$$\begin{aligned} 1+x &= \sqrt{1+x^2} = (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots)(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots) \\ &= c_0^2 + 2c_0 c_1 x + (2c_0 c_2 + c_1^2)x^2 + \dots \end{aligned}$$

Vergleich: $1 = c_0^2, 1 = 2c_0 c_1, 0 = c_0 c_2 + c_1^2, \dots \leadsto c_0 = 1, c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = \frac{1}{8}, \dots$

also: $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots$

- Differenzieren $\ln(1+x) = ?$

$$\partial_x \ln(1+x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{m=0}^{\infty} (-x)^m = \partial_x \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m+1} (-1)^m x^{m+1} + \text{konst} \right)$$

konst? $\ln(1+0) = 0 = \text{konst.}$

also:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \quad (5.14)$$

- Addition:

$$\text{ch } x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{x^n}{n!} + \frac{(-x)^n}{n!} \right) = \sum_{n \text{ gerade}} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \dots$$

$$\text{sh } x \quad \text{analog oder über} \quad \partial_x \text{ch } x \leadsto \text{sh } x = \sum_{n \text{ ungerade}} \frac{x^n}{n!} = x + \dots$$

5 Funktionen

- Differenzialgleichungen

$$f'' + f = 0 \quad \text{mit AW} \quad f(0) = 1, \quad f'(0) = 0. \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n n(n-1)x^{n-2} + \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m = \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1)x^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} x^{n-2}$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} [c_n n(n-1) + c_{n-2}] x^{n-2} \quad \leadsto \quad c_n = -\frac{c_{n-2}}{n(n-1)}. \quad \text{AW: } c_0 = 1, c_1 = 0$$

$$c_{\text{ungerade}} = 0, \quad c_n = \pm \frac{1}{n!}$$

$$\text{für } n \text{ gerade, also} \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \mp \dots$$

$$\text{entsprechend:} \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (5.15)$$

Taylor-Reihe

wir kennen lineare Approximation von $f(x)$ bei $x = \bar{x}$

$$f(x) = f(\bar{x} + \varepsilon) = f(\bar{x}) + \varepsilon \cdot f'(\bar{x}) + O(\varepsilon^2)$$

benennen um: $\bar{x} \rightarrow a, \quad \varepsilon \rightarrow x - a$

$$f(x) = f(a) + (x - a) \cdot f'(a) + O((x - a)^2)$$

besser: parabolische Approximation

$$f(x) = f(a) + (x - a) \cdot f'(a) + (x - a)^2 \cdot g(a) + \dots$$

differenziere:

$$f'(x) = 0 + 1 \cdot f'(a) + 2 \cdot (x - a) \cdot g(a) + \dots$$

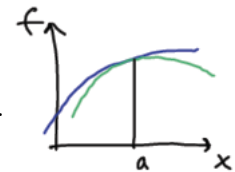
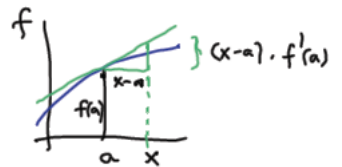
$$\leadsto g(a) = \frac{1}{2} f''(a)$$

oder nochmal differenzieren:

$$f''(x) = 2 \cdot g(a) + O(x - a)$$

allgemein:

$$\begin{array}{l} f(x) = \underline{f(a)} + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + c_4(x-a)^4 + \dots \xrightarrow{x=a} f(a) \\ f'(x) = 0 + \underline{c_1} + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + \dots \rightarrow c_1 \\ f''(x) = 0 + 0 + \underline{2c_2} + 6c_3(x-a) + 12c_4(x-a)^2 + \dots \rightarrow 2c_2 \\ f'''(x) = 0 + 0 + 0 + \underline{6c_3} + 24c_4(x-a) + \dots \rightarrow 6c_3 \end{array}$$



also:

$$f^{(n)}(a) = n! \cdot c_n \quad \Leftrightarrow \quad c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) \quad \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) \cdot (x-a)^n \quad \text{Taylor-Reihe} \quad (5.16)$$

oder

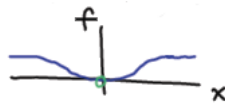
$$f(a+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) h^n = (e^{h \cdot \partial_x} f)(a) \quad (5.16')$$

Abbruch bei $n = N \Leftrightarrow$ Approx. von f durch Polynom N-ten Grades

Vorraussetzung: $f \in C^\infty$ („hinreichend glatt“)

geht nicht immer! Gegenbeispiel:

$$f(x) = e^{-c/x^2}$$



$$f^{(n)}(x) = \text{Polynom} \left(\frac{1}{x} \right) \cdot e^{-c/x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \quad \text{Taylorreihe} \equiv 0$$

oft nützlich, z.B.

$$f(x) = (1+x)^\lambda = 1 + \lambda x + \frac{1}{2} \lambda(\lambda-1)x^2 + \dots \quad (5.17)$$

oft benutzt: harmonische Näherung für Teilchen nahe V-Minimum $x = a$

$$V(x) = V(a) + \cancel{V'(a) \cdot (x-a)} + \frac{1}{2} V''(a) \cdot (x-a)^2 + O((x-a)^3)$$

$$V'(a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{Minimum}$$

$$m\ddot{x} = -\partial_x V = -V''(a) \cdot (x-a) + O((x-a)^2) = -m\omega^2(x-a) + \dots$$

$$\xrightarrow{\text{Hooke}} \omega^2 = V''(a)/m \quad (5.18)$$

5.4 Komplexe Zahlen \mathbb{C}

Körper-Erweiterung der reellen Zahlen \mathbb{R} um die Lösung von $x^2 + 1 = 0$.

Nenne $\sqrt{-1} =: i$ „imaginäre Einheit“

also:

$$i \cdot i = -1 \quad (5.18)$$

Komplexe Zahlen = Paare von reellen Zahlen (x, y)
= Linearkombination von 1 & i :

$$z = x \cdot 1 + y \cdot i = x + iy$$

[Vergleich mit 2-dim Vektoren $\vec{v} = \vec{e}_1 v_1 + \vec{e}_2 v_2 \doteq (v_1, v_2)$.]

Realteil $Re(x + iy) = x$ Imaginärteil $Im(x + iy) = y$

z heißt reell wenn $y = 0$, imaginär wenn $x = 0$

Addition:

$$(x + iy) + (u + iw) = (x + u) + i(y + w)$$

Multiplikation:

$$(x + iy) \cdot (u + iw) = (xu - yw) + i(xw + yu)$$

Negativer:

$$-(x + iy) = -x - iy$$

Null:

$$z = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$$

Inverses:

$$\frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}$$

Körper:

$$z \cdot w = 0 \Leftrightarrow z = 0 \vee w = 0$$

Wurzeln:

$$\sqrt{x + iy} = u + iv \quad \text{mit} \quad u^2 = \frac{1}{2} \left(x + \sqrt{x^2 + y^2} \right), \quad v^2 = \frac{1}{2} \left(-x + \sqrt{x^2 + y^2} \right)$$

Löst $(u + iv)^2 = x + iy \quad \curvearrowright \quad$ jede komplexe Zahl hat 2 Wurzeln

Hauptsatz der Algebra:

jedes Polynom n-ten Grades in \mathbb{C} hat n Nullstellen (mit Multiplizität)

Konjugation: involutive Abbildung $i \mapsto -i$ d.h.

$$z = x + iy \mapsto x - iy =: z^* \text{ oder } \bar{z}$$

$$\curvearrowright \operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + z^*), \quad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - z^*) \quad (5.19)$$

$$\curvearrowright z \text{ reell} \Leftrightarrow z = z^* \quad \text{Involution: } (z^*)^* = z$$

$$\curvearrowright (z + w)^* = z^* + w^*, \quad (z \cdot w)^* = z^* \cdot w^*$$

Betrag (Norm, Absolutwert):

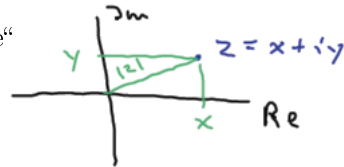
$$zz^* = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$$

$$|z| := \sqrt{zz^*} = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0 \quad (5.20)$$

$$\curvearrowright |z| = |z^*| = |-z|, \quad |z \cdot w| = |z| \cdot |w|, \quad |z + w| \leq |z| + |w|$$

geometrische Darstellung

$z \doteq (x, y)$ in \mathbb{R}^2 , „komplexe Ebene“



Betrag $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ Länge des Vektors (x, y)

$$\curvearrowright |z - w| = \text{Abstand}(z, w)$$

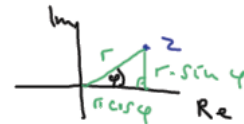
$$|z + w| \leq |z| + |w| \quad \Delta s \text{- Ungleichung}$$

Spiegelung an Achsen:



Produkt? Polarkoordinaten:

$$z = x + iy = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = r(c + is)$$



$$\text{mit } r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{und} \quad \varphi =: \arg(z) = \arctan \frac{y}{x} \quad \text{mod } 2\pi \quad (5.21)$$

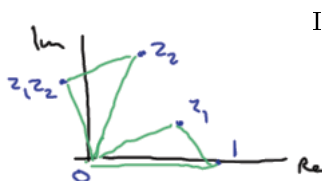
$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \cdot (c_1 + is_1) \cdot (c_2 + is_2) = r_1 r_2 ([c_1 c_2 - s_1 s_2] + i[s_1 c_2 + c_1 s_2])$$

$$= \underline{r_1 r_2} (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

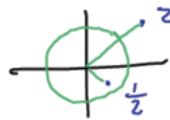
also:

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \quad \text{und} \quad \arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \quad (5.22)$$

geometrisch:



Inverses $\frac{1}{z} = \frac{z^*}{|z|^2}$, Multiplikation mit i
= Drehung um $\frac{\pi}{2}$



5 Funktionen

Konsequenz:

$$z^n = r^n(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi) \quad \text{Moivre}$$

schnelle Methode, $\sin n\varphi$ & $\cos n\varphi$ zu berechnen,

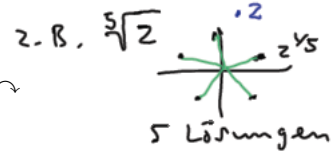
z.B. $r = 1$, $\cos n\varphi = \operatorname{Re}(z^n) = \operatorname{Re}((\cos \varphi + i \sin \varphi)^n)$

n-te Wurzel: $\sqrt[n]{z} = w \Leftrightarrow z = w^n$

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad w = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) \quad \curvearrowright$$

$$r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \rho^n(\cos n\theta + i \sin n\theta) \quad \curvearrowright$$

$$\rho^n = r, \quad n\theta = \varphi \quad \curvearrowright \quad \rho = \sqrt[n]{r}, \quad \theta = \frac{\varphi}{n} + 2\pi \cdot \frac{k}{n} \quad \text{mit } k = 0, 1, \dots, n-1$$



Exponentialfunktion:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \quad \text{für } z \in \mathbb{C} \text{ existiert, wähle } z = ix \text{ imaginär}$$

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + ix + \frac{1}{2!}(ix)^2 + \frac{1}{3!}(ix)^3 + \frac{1}{4!}(ix)^4 + \dots & (\text{Euler}) & \quad (5.23) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 \pm \dots\right) + i\left(x - \frac{1}{3!}x^3 \pm \dots\right) \\ &= \cos x + i \sin x \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) = \operatorname{ch}(ix) \\ \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) = \frac{1}{i} \operatorname{sh}(ix) \end{cases}$$

$$\curvearrowright z = r \cdot e^{i\varphi} \quad (5.24)$$

$$\curvearrowright e^{i\pi} = -1, \quad e^{\pm i\frac{\pi}{2}} = \pm i \quad (5.25)$$

6 Integrale

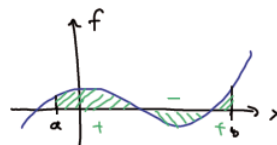
6.1 Gewöhnliche Integrale

ein Ziel:

Berechnung von Flächen unter Graphen von Funktionen

Fläche

$$F_a^b =: \int_a^b dx f(x)$$

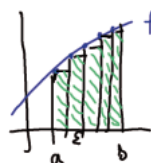


$\int \rightarrow$ stilisiertes \sum $dx \rightarrow$ Differential $f(x) \rightarrow$ Integrand

Beziehung zu \sum :

$$\int_a^b dx f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{N-1} \varepsilon \cdot f(a + n\varepsilon)$$

$$N\varepsilon = b - a$$



Eigenschaften:

$$\int_b^a dx f := - \int_a^b dx f \quad \curvearrowright \quad \int_a^a dx f = 0$$

$$\int_a^b dx \text{ konst.} = \text{konst.} \cdot (b - a)$$

$$f(-x) = -f \quad \curvearrowright \quad \int_{-a}^a dx f(x) = 0$$

$$\int_a^b dx (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b dx f + \beta \int_a^b dx g \quad (6.1)$$

$$\int_a^b dx f + \int_b^c dx f = \int_a^c dx f$$

$$\int_a^b dx f(x) = \int_{a+c}^{b+c} dx f(x-c)$$

$$\int_a^b dx f(x) = \lambda \int_{\frac{a}{\lambda}}^{\frac{b}{\lambda}} dx f(\lambda x)$$

6 Integrale

Hauptsatz: betrachte $\int_a^b dx f(x)$ als Funktion von b :

$$\int_a^b dx f(x) =: I(b, a) \quad \text{wackele an oberer Grenze:}$$

$$I(b + \varepsilon, a) - I(b, a) = \left(\int_a^{b+\varepsilon} - \int_a^b \right) dx f(x) = \int_b^{b+\varepsilon} dx f(x) = \varepsilon \cdot f(b) + O(\varepsilon^2)$$

$$\leadsto \partial_b I(b, a) = \partial_b \int_a^b dx f(x) = f(b)$$

Def.: eine Stammfunktion F zu einer Funktion f erfüllt $F' = f$
„Anti-Ableitung“, nur bis auf Konstante C festgelegt

$$\left. \begin{array}{l} \leadsto I(b, a) = F(b) + C \\ \text{für } b = a: \quad I(a, a) = 0 = F(a) + C \end{array} \right\} I(b, a) = F(b) - F(a)$$

Fazit:

$$\int_a^b dx f(x) = \int_a^b dx \frac{dF}{dx}(x) = \int_{F(a)}^{F(b)} dF = F \Big|_a^b = F(b) - F(a) \quad (6.2)$$

Integrieren ist eine Kunst. Aber es gibt Tricks!

z.B. Symmetrieargumente:

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx \frac{\sin x}{1+x^2} = 0 \quad \text{weil } f(-x) = -f(x)$$

Lösungsstrategie: f skizzieren, umformen, Ansätze versuchen $f = \partial_x(\dots)$

Bsp.:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/6}^{\pi/4} dx \tan x &\stackrel{\text{sym}}{=} \int_{\pi/6}^{\pi/4} dx \tan x = \int_{\pi/6}^{\pi/4} dx \frac{\sin x}{\cos x} \\ &\stackrel{\text{raten}}{=} - \int_{\pi/6}^{\pi/4} dx \partial_x \ln \cos x \stackrel{(6.2)}{=} - \ln \cos x \Big|_{\pi/6}^{\pi/4} \\ &= -\ln\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) + \ln\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) \\ &= \ln \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Uneigentliche Integrale

→ Flächen, die sich ins Unendliche erstrecken:
solche Integrale müssen nicht existieren ($F = \infty$).

**definiert als Grenzwerte**

$$\int_a^\infty dx f(x) := \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b dx f(x), \quad \int_0^b dx f(x) := \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^b dx f(x)$$

Beispiele: $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dx e^{-\lambda x} &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b dx \partial_x \left(\frac{-1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right) = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{-1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{-1}{\lambda} e^{-\lambda b} - \frac{-1}{\lambda} \right) \\ &\stackrel{\text{oder}}{=} \int_0^\infty dx \partial_x \left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right) = \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_0^\infty = \dots = \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

$$\int_0^1 dx x^{-\lambda} \stackrel{\lambda \neq 1}{=} \left[\frac{1}{1-\lambda} x^{-\lambda+1} \right]_0^1 = \frac{1}{1-\lambda} (1 - (+0)^{1-\lambda}) = \begin{cases} \frac{1}{1-\lambda} & \text{falls } \lambda < 1 \\ \infty & \text{falls } \lambda > 1 \end{cases}$$

$$\int_0^1 dx \{ \ln(1 + e^x) - x \} < \infty? \quad \text{untersuche Integrand für } x \rightarrow \infty$$

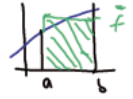
$$\{ \dots \} = \ln(e^x + 1) - x = \ln[e^x(1 + e^{-x})] - x = \underbrace{\ln e^x}_x + \ln(1 + e^{-x}) - x$$

$$= \ln(1 + e^{-x}) = e^{-x} - \frac{1}{2}(e^{-x})^2 + \frac{1}{3}(e^{-x})^3 \mp \dots \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0 \quad \curvearrowright \int \text{ existiert}$$

6.2 Beispiele

a) Mittelung

Grenzwert des arithmetischen Mittels auf kontinuierlichen Mengen



$$\begin{aligned}\bar{f} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_n f_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_n f_n \cdot dx}{N \cdot dx} = \frac{1}{b-a} \int_a^b dx f(x) \\ \overline{f^2} &= \frac{1}{b-a} \int_a^b dx f(x)^2 \neq \bar{f}^2 = \frac{1}{(b-a)^2} \left(\int_a^b dx f(x) \right)^2 \\ \overline{f+g} &= \bar{f} + \bar{g}, \quad \overline{\alpha f} = \alpha \cdot \bar{f}, \quad \overline{1} = 1\end{aligned}\tag{6.3}$$

Schwankung:

$$\Delta f := \sqrt{(f - \bar{f})^2} = \sqrt{\overline{f^2} - 2\bar{f} \cdot \bar{f} + \bar{f}^2} = \sqrt{\overline{f^2} - \bar{f}^2}\tag{6.4}$$

Bsp.: harmonischer Oszillator $x(t) = A \cos \omega t$, $T = \frac{2\pi}{\omega}$

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{T} \int_0^T dt A \cos \omega t = 0, \quad (\Delta x)^2 = \overline{x^2} = \frac{1}{T} \int_0^T dt A^2 \cos^2 \omega t = \frac{1}{2} A^2 \\ \bar{V} &= \frac{1}{T} \int_0^T dt \frac{\kappa}{2} x^2 = \frac{\kappa}{2} \overline{x^2} = \frac{\kappa}{4} A^2 \\ \bar{T} &= \frac{1}{T} \int_0^T dt \frac{m}{2} \dot{x}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T dt \frac{m}{2} (A\omega \sin \omega t)^2 = \frac{m}{2} A^2 \omega^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{\kappa}{4} A^2 \text{ wegen } m\omega^2 = \kappa\end{aligned}$$

b) Lineare Massenverteilung

$$\begin{aligned}m_i \quad i = 1, \dots, N &\xrightarrow{N \rightarrow \infty} \sigma(x), \quad x \in [0, L] \quad \text{Massendichte} \\ \curvearrowright &\sigma(x) dx \quad \text{Masse zwischen } x \text{ und } x + dx \\ \curvearrowright &M = \sum_{i=1}^N m_i \xrightarrow{N \rightarrow \infty} M = \int_0^L dx \sigma(x) \quad \text{Gesamtmasse} \\ \curvearrowright &m(x) = \int_0^x dy \sigma(y) \quad \text{„Masse von 0 bis } x\text{“}\end{aligned}$$

wichtig sind „Momente“ der Massendichte

Beispiele:

Schwerpunkt

$$R_s = \frac{1}{M} \sum_a m_a x_a \xrightarrow{N \rightarrow \infty} R_s = \bar{x} = \frac{1}{M} \int_0^L dx \sigma(x) \cdot x\tag{6.5}$$

Trägheitsmoment um $x = 0$:

$$I = \sum_a m_a x_a^2 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} I = M \cdot \overline{x^2} = \int_0^L dx \sigma(x) \cdot x^2 \quad (6.6)$$

c) Überlagerung

$$\begin{aligned} \text{zwei Kraftfelder } \vec{F}_{(1)} \& \vec{F}_{(2)} \quad \curvearrowright \quad \text{Summe } \vec{F} = \vec{F}_{(1)} + \vec{F}_{(2)} \\ \text{seien konservativ } \vec{F}_{(i)}(\vec{r}) &= -\vec{\nabla} V_{(i)}(\vec{r}) \quad i = 1, 2 \\ \curvearrowright \quad \vec{F} = -\nabla V \quad \text{mit } V &= V_{(1)} + V_{(2)} \end{aligned}$$

Bsp.: Gravitationspotenzial einer linearen Massenverteilung

$$\text{eine Masse } (M_0, \vec{r}_0) : \quad V(\vec{r}) = -\frac{\gamma m M_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}$$

$$\text{viele Massen } (M_a, \vec{r}_a) : \quad V(\vec{r}) = -\sum_{a=1}^N \frac{\gamma m M_a}{|\vec{r} - \vec{r}_a|}$$

kontinuierliche Massenverteilung $(\sigma(x) \text{ entlang } x \in [0, L])$,

$$\begin{aligned} V(\vec{r}) &= -\gamma m \int_0^L dx' \frac{\sigma(x')}{|\vec{r} - \vec{r}(x')|} \\ &\stackrel{\vec{r} \doteq (x, y, z)}{=} -\gamma m \int_0^L dx' \frac{\sigma(x')}{\sqrt{(x - x')^2 + y^2 + z^2}} \end{aligned} \quad (6.7)$$

6.3 Integrationsmethoden

a) Partialbruch-Zerlegung

Beispiel: $\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{1+x^2}$, mit $A, B = \text{Polynome}$

finde A, B : $1 = A(1+x^2) + Bx = A + x \cdot (B + Ax)$

$$\leadsto A = 1, B = -x, \text{ d.h. } \frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$$

$$\int \frac{dx}{x(1+x^2)} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x dx}{1+x^2} = \ln x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$$

b) Partielle Integration nutze Produktregel

$$f = u \cdot v$$

$$\leadsto f' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\leadsto \int_a^b dx (uv)' = [uv]_a^b = \int_a^b dx u'v + \int_a^b dx uv'$$

$$\leadsto \int_a^b dx u'v = [uv]_a^b - \int_a^b dx uv'$$

Beispiele:

$$\int_0^y dx \ln x = \int_0^y dx 1 \cdot \ln x \stackrel{(6.8)}{=} [x \ln x]_0^y - \int_0^y dx x \cdot \frac{1}{x} = y \ln y - y \quad (6.8)$$

c) Substitution = Wechsel der Integrationsvariablen

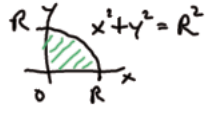
$$I = \int_a^b dx f(x) \quad \text{Substitution: } \begin{array}{l} x \rightarrow t \\ x = x(t) \\ dx = \frac{dx}{dt} dt = dt \dot{x}(t) \end{array}$$

$$I = \int_{t(a)}^{t(b)} dt \dot{x}(t) f(x(t)) =: \int_{t(a)}^{t(b)} dt \dot{x}(t) g(t) \quad (6.9)$$

Grenzen: $x = a \leftrightarrow t = t(a)$ und $x = b \leftrightarrow t = t(b)$

Vorsicht, wenn $x(t)$ nicht monoton!

Beispiel: Kreisfläche



$$F_{\odot} = 4 \int_0^R dx \sqrt{R^2 - x^2}$$

$$\text{Sub: } \left\{ \begin{array}{l} x = R \sin \varphi \\ dx = R \cos \varphi d\varphi \\ [0, R] \leftrightarrow [0, \pi/2] \end{array} \right\} = 4 \int_0^{\pi/2} d\varphi R \cos \varphi \sqrt{R^2 - R^2 \sin^2 \varphi}$$

$$= 4R^2 \int_0^{\pi/2} d\varphi \cos \varphi \sqrt{1 - \sin^2 \varphi}$$

$$= 4R^2 \int_0^{\pi/2} d\varphi \cos^2 \varphi$$

$$= 4R^2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} = \pi R^2$$

d) Differenzieren nach Parameter

Beispiel: $\int_0^{\infty} dx x^n e^{-x} = \int_0^{\infty} dx x^n e^{-\alpha x} |_{\alpha=1}$

$$= \left[(-\partial_{\alpha})^n \overbrace{\int_0^{\infty} dx e^{-\alpha x}}^{1/\alpha} \right]_{\alpha=1}$$

$$= \left[(-\partial_{\alpha})^n \frac{1}{\alpha} \right]_{\alpha=1} = n! \alpha^{-(n+1)} |_{\alpha=1} = n!$$

e) Parameter-Abhängigkeit

... falls nur die Abhängigkeit von einem Parameter gesucht ...

Beispiel: T-Abhängigkeit der Energie E eines Hohlraumstrahlers

$$E = \frac{V}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{d\varepsilon}{(\hbar c)^3} \frac{\varepsilon^3}{e^{\varepsilon/T} + 1} \stackrel{\varepsilon=Tx}{=} \frac{V}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{T dx}{(\hbar c)^3} \frac{T^3 x^3}{e^x + 1} = \frac{VT^4}{(\hbar c)^3 \pi^2} \int_0^{\infty} \frac{dx x^3}{e^x + 1} \sim T^4$$

6 Integrale

f) Reihenentwicklung des Integranden

$$\int_a^b dx f(x) = \int_a^b dx \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_a^b dx x^n \quad (\text{falls konvergiert})$$

Beispiel: $|e^{-x}| \leq 1$ für $x \geq 0$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} dx \frac{x^3}{e^x + 1} &= \int_0^{\infty} dx x^3 e^{-x} \frac{1}{1 + e^{-x}} \stackrel{\substack{\text{geom.} \\ \text{Reihe}}}{=} \int_0^{\infty} dx x^3 e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} (-e^{-x})^n \\ &= \sum_{n+1=k}^{\infty} (-1)^{k-1} \int_0^{\infty} dx x^3 e^{-kx} \stackrel{\substack{x=y/k \\ (e)}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k^4} \underbrace{\int_0^{\infty} dy y^3 e^{-y}}_{(d): 3! = 6} \\ &= 6 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k^4} \stackrel{\text{Bronstein}}{=} 6 \cdot \frac{7\pi^4}{720} \end{aligned}$$

6.4 Kurven-, Flächen-, Volumenintegral

Verallgemeinerung, die sich auf gewöhnliche Integrale reduzieren

a) Vektor-Integrand

$$\int_a^b dx \vec{f}(x) \doteq \int_a^b dx (f_1(x), f_2(x), f_3(x)) = \left(\int_a^b dx f_1(x), \int_a^b dx f_2(x), \int_a^b dx f_3(x) \right)$$

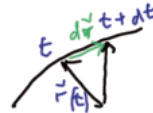
b) Kurven- oder Weg-Integral

Beiträge werden entlang einer Kurve aufgesammelt

Kurve \mathcal{C} , parametrisiert durch $t \in [t_1, t_2] : \vec{r}(t)$

im Zeitraum $[t, t + dt]$ ändert sich \vec{r} um

$$\vec{r}(t + dt) - \vec{r}(t) = \dot{\vec{r}}(t)dt = d\vec{r}(t)$$



Länge des Verschiebevektors $d\vec{r}$

$$ds := |d\vec{r}| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = v(t) dt \quad (6.10)$$

$$v = |\dot{\vec{r}}| \quad (dx)^2 \neq dx^2 = 2x dx$$

ds ersetzt dx im Kurvenintegral entlang \mathcal{C} von $f(\vec{r}(t)) = g(t)$

$$\int_{\mathcal{C}} ds f(\vec{r}) := \int_{t_1}^{t_2} dt v(t) f(\vec{r}(t)) \quad (6.11)$$

Beispiele:

- Länge von \mathcal{C} :

$$L = \int_{\mathcal{C}} ds = \int_{t_1}^{t_2} dt v(t) \quad \text{mit} \quad v = |\dot{\vec{r}}| = \sqrt{\dot{\vec{r}}^2}$$

- Masse eines Drahtes:


$$M = \int_{\mathcal{C}} ds \sigma(\vec{r}) = \int_{t_1}^{t_2} dt v(t) \sigma(\vec{r}(t))$$

- Gravitationspotenzial eines Drahtes:

$$V(\vec{r}) = -\gamma m \int_{\mathcal{C}} ds \frac{\sigma(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\gamma m \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{|\dot{\vec{r}}'(t)| \sigma(\vec{r}'(t))}{|\vec{r} - \vec{r}'(t)|} \quad (6.12)$$

6 Integrale

- Arbeit längs \mathcal{C} :



$$\begin{aligned}
 A &= \int_{\mathcal{C}} ds F_{\parallel}(\vec{r}) = \int_{\mathcal{C}} \underbrace{|d\vec{r}|}_{\dot{\vec{r}}(t) dt} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = \int_{\mathcal{C}} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} dt v(t) F_{\parallel}(\vec{r}(t)) = \int_{t_1}^{t_2} dt \dot{\vec{r}}(t) \cdot \vec{F}(\vec{r}(t))
 \end{aligned}
 \tag{6.13}$$

für konservatives $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$: $\dot{\vec{r}} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = -\dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla}V = -\partial_t V(\vec{r}(t))$

$$\curvearrowright A = \int_{t_1}^{t_2} dt (-\partial_t V(\vec{r}(t))) = V(\vec{r}(t_1)) - V(\vec{r}(t_2)) = V(1) - V(2) \tag{6.14}$$

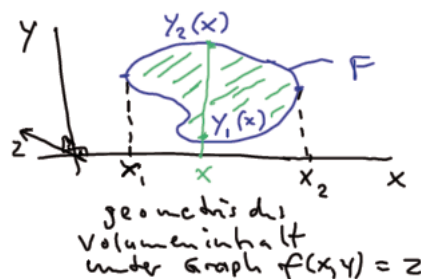
- c) Ebenes Flächenintegral

sammle Integranden $f(x, y)$

auf einem Gebiet $(x, y) \in F \subseteq \mathbb{R}^2$

erst $\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy f(x, y) = F(x)$ für jedes feste x

dann $\int_{x_1}^{x_2} dx F(x) = I$, d.h.



$$I = \int_F d^2r f(x, y) := \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy f(x, y) \tag{6.15}$$

Beispiele:

- Flächeninhalt einer Kreisscheibe $f(x, y) = 1$

$$F = \int_F d^2r 1 = \int_{-R}^{+R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy 1 = \int_{-R}^{+R} dx 2\sqrt{R^2-x^2} \stackrel{\text{s.o.}}{=} 2 \cdot \frac{\pi}{2} R^2 \quad \checkmark$$



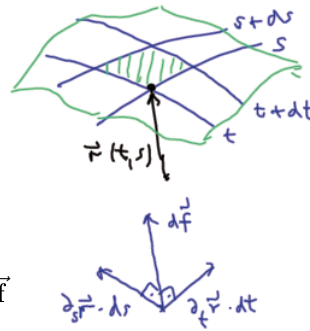
- Volumen einer Kugel $f(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} = z$

$$\begin{aligned}
 V &= 8 \int_F d^2r \sqrt{R^2 - r^2} = 8 \int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \\
 &\stackrel{\text{sub: } y = \sqrt{R^2-x^2} \cos \varphi}{=} 8 \int_0^R dx \int_0^{\pi/2} d\varphi \cos^2 \varphi \sqrt{R^2 - x^2} = \frac{4\pi}{3} R^3
 \end{aligned}$$



• Oberflächenintegral

Beiträge zu einem 2-dim. Integral können entlang einer beliebigen Fläche im \mathbb{R}^3 aufgesammelt werden.



Oberfläche S , parametrisiert als $\vec{r}(t, s) \in \mathbb{R}^3$
 Koordinaten $(t, s) \in F \subseteq \mathbb{R}^2$
 zum Bereich $[t, t + dt] \times [s, s + ds]$
 gehört infinitesimale Fläche df ,
 gegeben durch die Länge des Normalenvektors $d\vec{f}$

$$\begin{aligned} d\vec{f} &= [\vec{r}(t + dt, s) - \vec{r}(t, s)] \times [\vec{r}(t, s + ds) - \vec{r}(t, s)] \\ &= (\partial_t \vec{r}(t, s) \times \partial_s \vec{r}(t, s)) dt ds =: \vec{n} df \end{aligned} \quad (6.16)$$

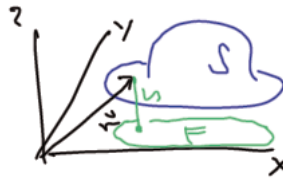
also:

$$df = |d\vec{f}| = |\partial_t \vec{r} \times \partial_s \vec{r}| dt ds, \quad \vec{n} = \frac{\partial_t \vec{r} \times \partial_s \vec{r}}{|\partial_t \vec{r} \times \partial_s \vec{r}|} \quad (6.16')$$

$$\int_S df f(\vec{r}) := \int_F dt ds |\dot{\vec{r}} \times \vec{r}'|(t, s) f(\vec{r}(t, s)) \quad (6.17)$$

Beispiel: Masse eines Hutes S

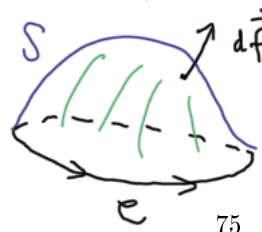
parametrisiert durch
 Projektion in xy -Ebene:
 $(t, s) = (x, y)$



$$\vec{r}(x, y) \doteq \begin{pmatrix} x \\ y \\ h(x, y) \end{pmatrix}, \quad (x, y) = F \quad \text{Massendichte: } \sigma(x, y)$$

$$\begin{aligned} M &= \int_S df \sigma(\vec{r}) = \int_F d^2r |\dot{\vec{r}} \times \vec{r}'| \sigma(x, y) \\ &= \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_x h \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_y h \end{pmatrix} \right| \sigma(x, y) \\ &= \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \sqrt{1 + (\partial_x h)^2 + (\partial_y h)^2} \sigma(x, y) \end{aligned}$$

Orientierung: Vorzeichenwahl von $d\vec{f}$ ist Konvention:
 falls ohne Rand, zeige $d\vec{f}$ nach außen. Notation: $\oint_S \dots$



6 Integrale

Beispiel: Strom I durch eine Fläche S

vektorielle Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$

nur die zur Fläche senkrechte Komponente

$\vec{j}_n = (\vec{j} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{n}$ (\vec{n} = Normaleneinheitsvektor) trägt zu I bei:

$$\begin{aligned} I &= \int_S df j_n(\vec{r}) = \int_S \underbrace{df \vec{n}(\vec{r})}_{d\vec{f}} \cdot \vec{j}(\vec{r}) = \int_S d\vec{f} \cdot \vec{j}(\vec{r}) \\ &= \int_F dt ds (\dot{\vec{r}} \times \vec{r}') \cdot \vec{j}(\vec{r}) \Big|_{\vec{r}=\vec{r}(t,s)} \end{aligned} \quad (6.18)$$

„Fluß von \vec{j} durch S “

- Volumen-Integral

$$I = \int_V d^3r f(\vec{r}) = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} dz f(x, y, z) \quad (6.19)$$

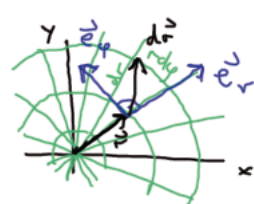
6.5 Krummlinige Koordinaten

zunächst im flachen Raum, zweidimensional

Beispiel: Polarkoordinaten $(x, y) \mapsto (r, \varphi)$

$$\left. \begin{array}{l} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \arctan y/x \end{array} \right. \quad \vec{r}(r, \varphi) \doteq \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (6.20)$$

neue Basisvektoren:

$$\begin{aligned} \partial_r \vec{r} &\doteq \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} && \doteq \vec{e}_r b_r && \curvearrowright && b_r = 1 \\ \partial_\varphi \vec{r} &\doteq r \begin{pmatrix} -s \\ c \end{pmatrix} && \doteq \vec{e}_\varphi b_\varphi && \curvearrowright && b_\varphi = r \\ c_{r\varphi} &:= \vec{e}_r \cdot \vec{e}_\varphi = 0 \end{aligned}$$


Vorsicht: $\vec{r} = \vec{e}_x x + \vec{e}_y y \neq \vec{e}_r r + \vec{e}_\varphi \varphi$

wichtig: $\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi$ sind ortsabhängig, nicht definiert bei $\vec{r} = 0$

statt \vec{r} studiere besser Änderungen $d\vec{r}, \dot{\vec{r}}$ etc.

$$\begin{aligned} d\vec{r} &= \partial_x \vec{r} \cdot dx + \partial_y \vec{r} \cdot dy && = \vec{e}_x dx + \vec{e}_y dy && \leftarrow && \vec{r}(x, y) \\ &\stackrel{\text{oder}}{=} \partial_r \vec{r} \cdot dr + \partial_\varphi \vec{r} \cdot d\varphi && = \vec{e}_r dr + \vec{e}_\varphi r d\varphi && \leftarrow && \vec{r}(r, \varphi) \end{aligned}$$

$$d\vec{r} \doteq \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c dr - rs d\varphi \\ s dr + rc d\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -rs \\ s & rc \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ d\varphi \end{pmatrix} = J \cdot \begin{pmatrix} dr \\ d\varphi \end{pmatrix} \quad (6.21)$$

J = Funktional- oder Jacobi-Matrix

teile durch dt bei Kurven:

$$\dot{\vec{r}} = \vec{e}_r \dot{r} + \vec{e}_\varphi r \dot{\varphi} \doteq \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -rs \\ s & rc \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} \quad (6.21')$$

$$v^2(t) = \dot{\vec{r}}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2$$

Linienelement:

$$\begin{aligned} (ds)^2 &= d\vec{r} \cdot d\vec{r} = (dr)^2 + r^2 (d\varphi)^2 \\ &= \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} (dt)^2 = (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) (dt)^2 \end{aligned} \quad (6.22)$$

Flächenelement:

$$df = \underbrace{dx dy}_{\text{Vorsicht: kein übliches Produkt!}} = r dr d\varphi \quad (6.23)$$

Vorsicht: kein übliches Produkt!

6 Integrale

Anwendungen:

- Kugelvolumen:

$$V = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R dr r \sqrt{R^2 - r^2} \stackrel{\text{Höhe}}{=} 8 \cdot \frac{\pi}{2} \int_0^R dr \left(-\frac{1}{3}\right) \partial_r (R^2 - r^2)^{3/2} = \frac{4\pi}{3} R^3$$

- Gauß-Integral:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\mathbb{R}^2} d^2r e^{-r^2/a^2} \stackrel{r \rightarrow r \cdot a}{=} a^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty dr r e^{-r^2} \\ &= a^2 \cdot 2\pi \int_0^\infty dr \left(-\frac{1}{2}\right) \partial_r e^{-r^2} = \pi a^2 \end{aligned} \quad (6.24)$$

$$\curvearrowright \text{Trick: } I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2}} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-\frac{x^2}{a^2}} \right)^2 \curvearrowright I_1 = \sqrt{\pi} \cdot a$$

allgemeine Situation:

krummlinige Koordinaten im \mathbb{R}^2 , $(x, y) \mapsto (u, v)$

$$\vec{r} \doteq \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \end{pmatrix} \quad [\text{nicht } \vec{r} \doteq (u, v) \text{ schreiben!}]$$

- Basisvektoren:

$$\begin{aligned} \partial_u \vec{r} = \vec{e}_u b_u, \quad \partial_v \vec{r} = \vec{e}_v b_v \quad \text{so dass} \quad \begin{cases} \vec{e}_u^2 = \vec{e}_v^2 = 1 \\ \vec{e}_u \cdot \vec{e}_v = c_{uv} \end{cases} \\ \text{d.h. } b_u(u, v) = |\partial_u \vec{r}|, \quad b_v(u, v) = |\partial_v \vec{r}| \end{aligned} \quad (6.25)$$

- Differenzial:

$$\begin{aligned} d\vec{r} &= \partial_u \vec{r} du + \partial_v \vec{r} dv = \vec{e}_u b_u du + \vec{e}_v b_v dv \\ \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \partial_u x du + \partial_v x dv \\ \partial_u y du + \partial_v y dv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_u x & \partial_v x \\ \partial_u y & \partial_v y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} =: J \cdot \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.26)$$

$$\text{oder auch} \quad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = J \cdot \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix}, \quad \text{sowie} \quad \rightarrow (dx, dy) = (du, dv) \cdot J^T$$

- Linienelement:

$$\begin{aligned} (ds)^2 &= d\vec{r} \cdot d\vec{r} = (dx, dy) \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = (du, dv) J^T J \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} \\ &= (\partial_u \vec{r} du + \partial_v \vec{r} dv)^2 = (du, dv) \begin{pmatrix} \partial_u \vec{r} \cdot \partial_u \vec{r} & \partial_u \vec{r} \cdot \partial_v \vec{r} \\ \partial_v \vec{r} \cdot \partial_u \vec{r} & \partial_v \vec{r} \cdot \partial_v \vec{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} \\ &= (du, dv)_G \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.27)$$

induzierte Metrik

$$\begin{aligned}
G &= \begin{pmatrix} \partial_u \vec{r} \cdot \partial_u \vec{r} & \partial_u \vec{r} \cdot \partial_v \vec{r} \\ \partial_v \vec{r} \cdot \partial_u \vec{r} & \partial_v \vec{r} \cdot \partial_v \vec{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_u^2 & b_u b_v c_{uv} \\ b_u b_v c_{uv} & b_v^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{uu} & g_{uv} \\ g_{vu} & g_{vv} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \partial_u x & \partial_u y \\ \partial_v x & \partial_v y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_u x & \partial_v x \\ \partial_u y & \partial_v y \end{pmatrix} = J^\top J
\end{aligned} \tag{6.27'}$$

also:

$$\begin{aligned}
(ds)^2 &= g_{uu}(du)^2 + 2g_{uv} du dv + g_{vv}(dv)^2 = g_{ij} du_i du_j \\
\text{mit } i, j &\in \{u, v\} = \{u_1, u_2\} \quad \text{und} \quad g_{ij} = \partial_i \vec{r} \cdot \partial_j \vec{r}
\end{aligned} \tag{6.27''}$$

Kurven in \mathbb{R}^2 : $\vec{r}(t) \curvearrowright (x(t), y(t)) \curvearrowright (u(t), v(t)) \curvearrowright du_i = \dot{u}_i dt$

$$ds = \sqrt{g_{ij} du_i du_j} = \sqrt{g_{ij} \dot{u}_i \dot{u}_j} dt = v(t) dt \quad \text{mit} \quad v^2 = \begin{pmatrix} \dot{u} & \dot{v} \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} \tag{6.28}$$

wichtige Kurvenintegrale:

Bogenlänge

$$s(1, 2) = \int_1^2 ds = \int_{t_1}^{t_2} dt v = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{g_{ij} \dot{u}_i \dot{u}_j} \tag{6.29}$$

Wirkung

$$w(1, 2) = \int_1^2 \vec{p} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 m \dot{\vec{r}} \cdot d\vec{r} = m \int_{t_1}^{t_2} dt \dot{\vec{r}}^2 = m \int_{t_1}^{t_2} dt g_{ij} \dot{u}_i \dot{u}_j \tag{6.30}$$

Flächenelement:lese $\vec{r}(u, v) \doteq \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) = 0 \end{pmatrix}$ wie Oberfläche $\in \mathbb{R}^3$, nur mit $z = 0$ mit (u, v) statt (t, s)

$$\begin{aligned}
df &= |\partial_u \vec{r} \times \partial_v \vec{r}| du dv = \sqrt{(\partial_u \vec{r} \times \partial_v \vec{r})^2} du dv \\
&= \sqrt{(\partial_u \vec{r})^2 (\partial_v \vec{r})^2 - (\partial_u \vec{r} \cdot \partial_v \vec{r})^2} du dv \\
&= \sqrt{\det \begin{pmatrix} \partial_u \vec{r} \cdot \partial_u \vec{r} & \partial_u \vec{r} \cdot \partial_v \vec{r} \\ \partial_v \vec{r} \cdot \partial_u \vec{r} & \partial_v \vec{r} \cdot \partial_v \vec{r} \end{pmatrix}} du dv = \sqrt{\det G} du dv \\
&= \sqrt{\det J^\top J} du dv = \sqrt{\det J^\top \cdot \det J} du dv \\
&= |\det J| du dv \quad \text{Jacobi-Determinante}
\end{aligned} \tag{6.31}$$

das heißt:

$$dx dy = \left| \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv \quad \text{mit} \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \equiv J$$

Substitutionregel:

$$\int_F dx dy f(x, y) = \int_F du dv \left| \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| f(x(u, v), y(u, v)) \tag{6.32}$$

6 Integrale

Beispiel Polarkoordinaten: $(x, y) \mapsto (r, \varphi)$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow |\det J| = \sqrt{\det G} = r$$

$$\rightsquigarrow dx dy = r \cdot dr d\varphi$$

Verkettung: $(x, y) \mapsto (u, v) \mapsto (t, s)$

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right)^{-1} \quad \text{inverse Jacobi-Matrix}$$

$$\begin{aligned} dx dy &= \left| \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \cdot \left| \det \frac{\partial(u, v)}{\partial(t, s)} \right| dt ds \\ &= \left| \det \left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \cdot \frac{\partial(u, v)}{\partial(t, s)} \right) \right| dt ds \\ &= \left| \det \begin{pmatrix} \partial_u x & \partial_v x \\ \partial_u y & \partial_v y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_t u & \partial_s u \\ \partial_t v & \partial_s v \end{pmatrix} \right| dt ds \\ &= \left| \det \begin{pmatrix} \partial_u x \partial_t u + \partial_v x \partial_t v & \partial_u x \partial_s u + \partial_v x \partial_s v \\ \partial_u y \partial_t u + \partial_v y \partial_t v & \partial_u y \partial_s u + \partial_v y \partial_s v \end{pmatrix} \right| dt ds \\ &= \left| \det \begin{pmatrix} \partial_t x & \partial_s x \\ \partial_t y & \partial_s y \end{pmatrix} \right| dt ds = \left| \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(t, s)} \right| dt ds \quad \checkmark \end{aligned}$$

Erweiterung auf 3 Dimensionen

$$(x, y, z) \mapsto (u, v, w) \quad \vec{r}(u, v, w)$$

alles analog zu 2 Dimensionen: J, G sind 3×3 Matrizen

Linielement entsprechend

Volumenelement

$$\begin{aligned} dV = dx dy dz &= \left| \det \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw \\ &= |(\partial_u \vec{r} \times \partial_v \vec{r}) \cdot \partial_w \vec{r}| du dv dw \end{aligned} \quad (6.33)$$

Oberflächenelement: Einbettung einer Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$

$$\mathbb{R}^3 \ni \vec{r} \doteq \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix} \quad \text{hatten wir schon: } \vec{r}(t, s), \quad \nexists J$$

$$df = |\partial_u \vec{r} \times \partial_v \vec{r}| du dv = \sqrt{\det G} du dv \quad \text{mit } g_{ij} = \partial_i \vec{r} \cdot \partial_j \vec{r}$$

Beispiel: Kugelkoordinaten $(x, y, z) = \begin{pmatrix} r \\ \vartheta \\ \varphi \end{pmatrix}_{\substack{[0, \infty] \\ [0, \pi] \\ [0, 2\pi]}}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin \vartheta \cos \varphi \\ r \sin \vartheta \sin \varphi \\ r \cos \vartheta \end{pmatrix} = \underline{r}$$

6.5 Krummlinige Koordinaten

$$\partial_r \vec{r} = \begin{pmatrix} Sc \\ Ss \\ C \end{pmatrix}, \quad \partial_\theta \vec{r} = r \begin{pmatrix} Cc \\ Cs \\ -S \end{pmatrix}, \quad \partial_\varphi \vec{r} = r \begin{pmatrix} -Ss \\ Sc \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{alle orthogonal}$$

$$b_r = 1 \quad b_\theta = r \quad b_\varphi = r \sin \vartheta$$

$$J = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_r \underline{r} & \partial_\theta \underline{r} & \partial_\varphi \underline{r} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \rightarrow J^\top J = G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \vartheta \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} (ds)^2 &= (dr)^2 + r^2 (d\vartheta)^2 + r^2 \sin^2 \vartheta (d\varphi)^2 \\ \dot{\vec{r}} &= \dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2 \\ |\det J| &= \sqrt{\det G} = r^2 \sin \vartheta \end{aligned} \right\} \quad (6.34)$$

$$dV = r^2 \sin \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi = -r^2 \, dr \, d(\cos \vartheta) \, d\varphi =: r^2 \, dr \, d\Omega \quad (6.35)$$

Anwendungen

- Kugeloberfläche $r = R = \text{konst.}$

$$df = \frac{dV}{dr} \Big|_{r=R} = R^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \quad F: [0, \pi] \times [0, 2\pi]^{(\vartheta, \varphi)}$$

$$A_R = \int_{S^2} df = \int_F R^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = R^2 \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi = R^2 \cdot 2 \cdot 2\pi \quad \checkmark$$

- Kugelvolumen $r \in [0, R]$ sowie $(\vartheta, \varphi) \in S^2$

$$V_R = \int_{B^3} dV = \int_0^R dr \, r^2 \underbrace{\int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi}_{4\pi} = 4\pi \frac{1}{3} r^3 \Big|_0^R = \frac{4\pi}{3} R^3 \quad \checkmark$$

Parametrisierte Oberfläche - gekrümmt oder flach?

gegebene Koordinaten (u, v) und Metrik $g_{ij}(u, v) \rightarrow$ Vermessung

Antwort (Gauß):

berechne Krümmung $K(u, v)$.

Für orthogonale Koordinaten ($g_{12} = 0$):

$$K = \frac{1}{2g_{11}g_{22}} \left\{ -\partial_2^2 g_{11} - \partial_1^2 g_{22} + \frac{1}{2g_{11}} [\partial_1 g_{11} \partial_1 g_{22} + \partial_2 g_{11} \partial_2 g_{11}] + \frac{1}{2g_{22}} [\partial_2 g_{22} \partial_2 g_{11} + \partial_1 g_{22} \partial_1 g_{22}] \right\} \quad (6.34)$$

falls die Fläche eingebettet ist: $\vec{r}(u, v) \in \mathbb{R}^3$

$$\left. \begin{aligned} \curvearrowright \quad g_{ij} &= \partial_i \vec{r} \cdot \partial_j \vec{r}, \quad \vec{n} = \frac{\partial_u \vec{r} \times \partial_v \vec{r}}{|\partial_u \vec{r} \times \partial_v \vec{r}|}, \quad h_{ij} = \vec{n} \cdot \partial_{ij} \vec{r} \\ \text{dann ist} \quad K &= \frac{\det H}{\det G} \end{aligned} \right\} \quad (6.35)$$

6 Integrale

Beispiel Rotationsflächen

Polarkoordinaten (ρ, ϕ) mit Metrik $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f(\rho)^2 \end{pmatrix}$

Gauß-Formel ergibt

$$K = \frac{-f''}{f}$$



Vermessung:

$$(ds)^2 = (d\rho)^2 + f(\rho)^2(d\phi)^2$$

- Speiche:

$$d\phi = 0 \quad \int_0^r ds|_{\text{Speiche}} = \int_0^r d\rho = r$$

- Kreis:

$$d\rho = 0 \quad \int_0^{2\pi} ds|_{\text{Kreis}(r)} = \int_0^{2\pi} d\phi f(\rho) \Big|_{\rho=r} = 2\pi \cdot f(r)$$

Einbettung

$$\vec{r}(\rho, \phi) = \begin{pmatrix} f(\rho) \cos \phi \\ f(\rho) \sin \phi \\ h(\rho) \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad G = \begin{pmatrix} f'^2 + h'^2 & 0 \\ 0 & f^2 \end{pmatrix}$$

möchte

$$g_{\rho\rho} = 1 \quad \rightsquigarrow \quad h'^2 + f'^2 = 1 \quad \rightsquigarrow \quad h(\rho) = \int^\rho d\rho' \sqrt{1 - f'^2}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -h'c \\ -h's \\ f' \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad H = \begin{pmatrix} f'h'' - f''h' & 0 \\ 0 & fh' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f''/h' & 0 \\ 0 & fh' \end{pmatrix}$$

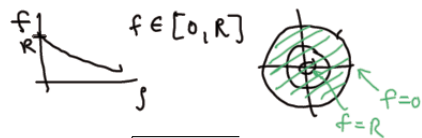
$$\rightsquigarrow \quad K = \frac{\det H}{\det G} = \frac{-f''f}{f^2} = -\frac{f''}{f}$$

Konkreter Fall: Pseudosphäre $K = -\frac{1}{R^2} < 0$ konst.

$$f(\rho) = Re^{-\rho/R}$$

$$h(\rho) = \int_0^\rho d\rho' \sqrt{1 - e^{-2\rho'/R}}$$

$$= \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{\quad}}{1 - \sqrt{\quad}} - \sqrt{\quad} \quad \text{mit} \quad \sqrt{\quad} \equiv \sqrt{1 - e^{-2\rho'/R}}$$



Graph der Rotationsfläche: plote h über f
 $h(f)$ wie $h(\rho)$, bloß mit $\sqrt{\quad} \equiv \sqrt{1 - f^2/R^2}$

Fläche heißt „Traktrix“ (\rightarrow hyperbolische Geometrie)

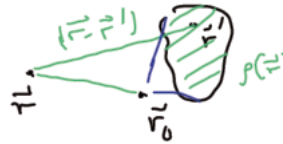


6.6 Delta-Funktion

Beschreibung von Massen- oder Ladungsdichten von Objekten, die nicht dreidimensional sind.

Bsp: Gravitationspotenzial eines Massepunktes M bei \vec{r}_0

$$\begin{aligned} V(\vec{r}) &= -\gamma m \int_{\mathbb{R}^3} d^3 r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &= -\gamma m \frac{M}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} \end{aligned}$$



wie muß $\rho(\vec{r}')$ beschaffen sein, damit das stimmt? notwendig:

$$\begin{aligned} \rho(\vec{r}') &= 0 \quad \text{für} \quad \vec{r}' \neq \vec{r}_0 \quad \text{konzentriert} \\ \int d^3 r' \rho(\vec{r}') &= M \quad \text{Gesamtmasse} \end{aligned}$$

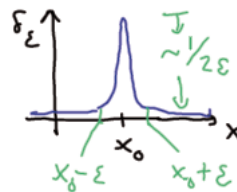
vereinfachte Diskussion auf eine Dimension

gesucht ist „Funktion“ $\rho(x)$ mit
$$\begin{cases} \rho(x) = 0 & \forall x \neq x_0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} dx \rho(x) = 1 \end{cases}$$

⚡ solche Funktion, aber näherungsweise

$$\rho_\varepsilon(x) =: \delta_\varepsilon(x - x_0)$$

Grenzwert $\varepsilon \rightarrow 0$ existiert nicht als Funktion, aber verallgemeinerte Funktion, sog. „Distribution“



$$\delta_0(x - x_0) =: \delta(x - x_0)$$

[erfunden von Dirac (Physik), präzisiert von Schwarz (Ma.)]

wird eigentlich nur unter dem Integral gebraucht

Definition:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta(x - x_0) f(x) = f(x_0) \quad (6.36)$$

für alle vernünftigen Funktionen f („Testfunktionen“): „ δ erschlägt ein Integral“

6 Integrale

verschiedene Darstellungen von δ_ε :

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1/2\varepsilon & x \in [-\varepsilon, \varepsilon] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{Kastenfunktion (6.37a)}$$

$$\delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}} e^{-x^2/\varepsilon^2} \quad \text{Gaußfunktion (6.37b)}$$

$$\delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi x} \sin \frac{x}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon\pi} \frac{\sin x/\varepsilon}{x/\varepsilon} = \frac{1}{2\pi} \int_{-1/\varepsilon}^{+1/\varepsilon} dk \cos kx \quad (6.37c)$$

$$\delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} = \frac{1}{\varepsilon\pi} \frac{1}{1 + (x/\varepsilon)^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{ikx - \varepsilon|k|} \quad \text{Lorentz-Kurve (6.37d)}$$

Konstruktionsprinzip:

nehme irgendeine Funktion $g(x)$, deren Integral existiert, mit $g(0) \neq 0$.

$$\delta_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon J} g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad \text{mit} \quad J = \int_{-\infty}^{+\infty} dx g(x) \quad (6.38)$$

Eigenschaften:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta(x - x_0) = 1 \quad (6.39a)$$

$$\int_a^b dx \delta(x - x_0) f(x) = \begin{cases} f(x_0) & a < x_0 < b \\ \frac{1}{2} f(x_0) & x_0 = a \text{ oder } x_0 = b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (6.39b)$$

$$\delta(-x) = \delta(x) \quad (6.39c)$$

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x) \quad (6.39d)$$

$$\delta(h(x)) = \sum_n \frac{\delta(x - x_n)}{|h'(x_n)|} \quad \text{mit} \quad h(x_n) = 0, \quad h'(x_n) \neq 0 \quad (6.39e)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta(x - a) \delta(x - b) = \delta(a - b) \quad (6.39f)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta'(x - x_0) f(x) = -f'(x_0) \quad (6.39g)$$

$$\theta'(x) = \delta(x) \quad \text{mit} \quad \theta(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1/2 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \quad \text{Heaviside- oder Stufenfunktion} \quad (6.39h)$$

$$\frac{1}{x + i\varepsilon} = \frac{x - i\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} P \frac{1}{x} - i\pi \delta(x) = \frac{1}{x} \quad (6.39i)$$

zu (6.41e):

für eine Nullstelle x_0 mit $h'(x_0) > 0$

wähle Intervall $a < x_0 < b$, in dem $y = h(x)$ umkehrbar

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) \delta(h(x)) = \int_a^b dx f(x) \delta(h(x)) = \int_{h(a)}^{h(b)} dy \frac{f(x(y))}{h'(x(y))} \delta(y) \stackrel{y=0 \leftrightarrow x=x_0}{=} \frac{f(x_0)}{h'(x_0)} \quad \checkmark$$

Substitution: $h(x) = y \curvearrowright h'(x) dx = dy$

falls $h'(x_0) < 0$ gibt es ein Vorzeichen

falls es mehrere Nullstellen gibt, ist über diese zu summieren

zu (6.41f):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} db \int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta(x-a) \delta(x-b) f(b) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta(x-a) f(x) = f(a)$$

zu (6.41g): partielle Integration:

$$\int dx f(x) \delta'(x-x_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int dx f(x) \partial_x \delta_\varepsilon(x-x_0) \stackrel{p.i.}{=} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int dx \partial_x f(x) \delta_\varepsilon(x-x_0)$$

Spezialfall:

$$f(x) = x : \quad x \delta'(x) = [x \delta(x)]' - x' \cdot \delta(x) = -\delta(x)$$

von einer Dimension zurück nach drei Dimensionen

in kartesischen Koordinaten

$$\left. \begin{array}{ll} \delta(x) & \text{reduziert} \quad \int d^3r \longrightarrow \int dy dz \quad yz - \text{Ebene} \\ \delta(x) \delta(y) & \text{reduziert} \quad \int d^3r \longrightarrow \int dz \quad z - \text{Achse} \\ \delta(x) \delta(y) \delta(z) & \text{reduziert} \quad \int d^3r \text{ auf Punkt } \vec{r} = 0 \end{array} \right\} \text{„Träger“}$$

allgemeiner:

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \quad \text{für punktförmige Träger}$$

Eigenschaft:

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3r \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) f(\vec{r}) = f(\vec{r}_0) \tag{6.40}$$

6 Integrale

In krummlinigen Koordinaten

$$\begin{aligned} f(\vec{r}_0) &= \int_{\mathbb{R}^3} dx dy dz f(x, y, z) \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \\ & \quad [\text{Wechsel}(x, y, z) \mapsto (u, v, w) \quad \vec{r}_0 : (u_0, v_0, w_0)] \\ &= \int du dv dw \underbrace{f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))}_{g(u, v, w)} \left| \det \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \\ &= \int du dv dw \underbrace{g(u, v, w)}_{g(u, v, w)} \delta(u - u_0) \delta(v - v_0) \delta(w - w_0) = g(u_0, v_0, w_0) \\ & \quad \curvearrowright \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \frac{\delta(u - u_0) \delta(v - v_0) \delta(w - w_0)}{\left| \det \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right|} \end{aligned} \quad (6.41)$$

7 gewöhnliche Differenzialgleichungen

7.1 Terminologie

gewöhnliche Dgl. (ODE): Gleichung für $y(x)$ [x = eine Variable]

allgemein: $F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$ („n-ter Ordnung“) $y^{(0)} \equiv y$
heißt „linear“, falls $y^{(k)} (k = 0, \dots, n)$ nur linear in F

allgemeine lineare ODE n-ter Ordnung explizit:

$$y^{(n)}(x) + f_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + f_1(x)y'(x) + f_0(x)y(x) = f(x)$$

abgekürzt (mit $f_n \equiv 1$):

$$\sum_{k=0}^n f_k(x) y^{(k)}(x) = f(x) \quad (7.1)$$

oder in „Operator-Form“:

$$(L_n y)(x) = f(x) \quad \text{mit} \quad L_n = \sum_{k=0}^n f_k(x) \partial_x^k$$

ODE heißt „regulär“ solange die $f_n(x)$ regulär sind, sonst „singulär“

$f(x)$ heißt „Inhomogenität“ \curvearrowright (7.1) ist $\begin{cases} \text{inhomogen falls } f \neq 0 \\ \text{homogen falls } f = 0 \end{cases}$

Aussagen über lineare ODEs:

- allg. Lösung von (7.1) ist eine n-parametrische Schar von Funktionen $y_{c_1, c_2, \dots, c_n}(x)$
Parameter c_1, c_2, \dots, c_n
- k Lösungen $y_1(x), y_2(x), \dots, y_k(x)$ heißen linear unabhängig,
wenn $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_k y_k(x) \equiv 0 \Rightarrow \alpha_k = 0 \quad \forall k$
- homogene ODE $L_n y = 0$ hat genau n linear unabhängige
Lösungen $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$

7 gewöhnliche Differenzialgleichungen

- Lösungen von $L_n y = 0$ bilden einen n-dimensionalen Vektorraum.

Bew.:

$$L_n y_a = 0 \quad \& \quad L_n y_b = 0 \quad \curvearrowright \quad L_n(\alpha y_a + \beta y_b) = 0$$

\curvearrowright Basis = $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ geeignet gewählt, linear unabhängig

- allg. Lösung der homogenen ODE ist

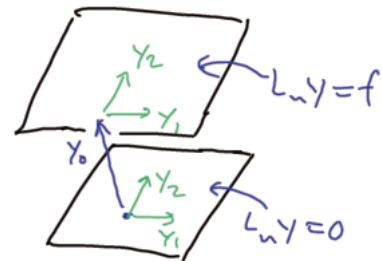
$$y_{c_1, c_2, \dots, c_n}(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) \quad (7.2)$$

- allg. Lösung der inhomogenen ODE ist

$$y_{c_1, c_2, \dots, c_n}(x) = y_0(x) + c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x) \quad (7.3)$$

wobei $y_0(x)$ irgendeine spezielle Lösung ist: $L_n y_0 = f$ & $L_n y_{n>0} = 0$

- Lösungsmenge von $L_n y = f$ ist kein Vektorraum für $f \neq 0$
- können zu y_0 beliebige homogene Lösungen addieren
- Differenz zweier inhomogener Lösungen ist eine homogene Lösung



7.2 Zehn Fälle

5 linear, danach 5 nichtlinear

① Potenz-Ansatz

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0 \quad \rightsquigarrow \quad L_2 = x^2 \partial_x^2 - 2x \partial_x + 2$$

$$\# \text{ Ableitungen} = \# \text{ x-Potenz} \quad \rightsquigarrow \quad \dim L_2 = 0$$

$$\text{Ansatz: } y = x^\lambda \quad [\text{allgemeiner: Potenzreihen-Ansatz}]$$

$$\text{eingesetzt: } x^\lambda \{\lambda(\lambda - 1) - 2\lambda + 2\} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\rightsquigarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 \end{array} \right\} \quad \rightsquigarrow \quad 2 \text{ Basis-Lösungen } \begin{cases} x^1 \\ x^2 \end{cases}$$

$$\text{allg. Lösung: } y = c_1 x + c_2 x^2 \quad \text{Test: Einsetzen}$$

② Variablen-Wechsel

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0 \text{ aber auch } x > 0$$

$$\text{inspiriert Wechsel } x = e^t \text{ weil } x \in (0, \infty] \leftrightarrow t \in [-\infty, +\infty]$$

$$y(x) = y(e^t) =: u(t) = u(\ln x)$$

$$\frac{dx}{dt} = e^t \quad \rightsquigarrow \quad \frac{dt}{dx} = e^{-t}$$

$$\partial_x = \frac{dt}{dx} \partial_t = e^{-t} \partial_t, \quad \partial_x^2 = e^{-t} \partial_t (e^{-t} \partial_t) = e^{-2t} \partial_t^2 - e^{-2t} \partial_t$$

$$\rightsquigarrow L_2 = e^{2t} \cdot e^{-2t} (\partial_t^2 - \partial_t) - 2e^t \cdot e^{-t} \partial_t + 2$$

$$= \partial_t^2 - 3\partial_t + 2 \quad \text{konstante Koeffizienten !}$$

$$\rightsquigarrow \ddot{u} - 3\dot{u} + 2u = 0 \quad \text{Lösung} \rightarrow \textcircled{3}$$

③ Exponential-Ansatz

$$m\ddot{x} = -\kappa x - R\dot{x} \quad \kappa, R > 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

ohne Reibung ($R = 0$): Schwingung mit $\omega_0^2 = \kappa/m$

setze $\kappa =: m\omega_0^2$ und $R =: 2m\gamma$

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - 2\gamma\dot{x} \Leftrightarrow L_2 x = 0 \quad \text{mit} \quad L_2 = \partial_t^2 + 2\gamma\partial_t + \omega_0^2$$

Exponential-Ansatz : $x(t) = e^{\lambda t}$

einsetzen gibt : $\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0$ *

Lösungen : $\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sigma$ mit $\sigma = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$

2 Grundlösungen : $x_1 = e^{\lambda_1 t}$, $x_2 = e^{\lambda_2 t}$

allg. Lösungen (homogen!) : $c_1, c_2 \in \mathbb{R} \leftrightarrow \text{AW}$

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} = e^{-\gamma t} (c_1 e^{\sigma t} + c_2 e^{-\sigma t})$$

→ Exp-Ansatz löst allg. lineare ODE mit konstanten Koeffizienten

hier: unterscheide 3 Fälle (je nach Lsg. von *)

(a) $\gamma > \omega_0 \rightsquigarrow \sigma$ reell und $< \gamma$

$\rightsquigarrow \lambda_{1,2}$ reell und < 0

\rightsquigarrow abklingende Exponential-Funktion

(b) $\gamma < \omega_0 \rightsquigarrow \sigma = i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} =: i\omega \rightsquigarrow \lambda_1^* = \lambda_2 \rightsquigarrow x$ komplex?

$$\rightsquigarrow x(t) = e^{-\gamma t} (c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}) \stackrel{\text{Euler}}{=} e^{-\gamma t} ([c_1 + c_2] \cos \omega t + i[c_1 - c_2] \sin \omega t)$$

Realität von $x \rightsquigarrow x^* \stackrel{!}{=} x \rightsquigarrow c_1 + c_2$ & $i(c_1 - c_2)$ reell

(c) $\gamma = \omega_0 \rightsquigarrow \sigma = 0 \rightsquigarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -\gamma \rightsquigarrow$ nur eine Grundlösung? nein!

$$\rightsquigarrow x(t) = e^{-\gamma t} (c + d \cdot t)$$

etwas cleverer : $L_2 = (\partial_t + \gamma)^2 + (\omega_0^2 - \gamma^2)$

suggeriert Ansatz : $x(t) = e^{-\gamma t} \cdot u(t)$

einsetzen :

$$(\partial_t + \gamma)e^{-\gamma t} = 0 \rightsquigarrow (\partial_t + \gamma)x = e^{-\gamma t} \dot{u} \rightsquigarrow$$

$$L_2 x = e^{-\gamma t} (\ddot{u} + (\omega_0^2 - \gamma^2)u) = 0 \rightsquigarrow$$

$$\ddot{u} + (\omega_0^2 - \gamma^2)u = 0 \quad \text{kein } \dot{u}$$

3 Fälle :

$$\gamma > \omega_0 \rightsquigarrow u \sim e^{\pm \sigma t} \tag{a}$$

$$\gamma < \omega_0 \rightsquigarrow u \sim e^{\pm i\omega t} \tag{b}$$

$$\gamma = \omega_0 \rightsquigarrow u = c + d \cdot t \tag{c}$$

④ Funktionswechsel:

$$y'(x) + P(x) y(x) = Q(x)$$

allg. lin. ODE 1. Ordnung:

$$L_1 = \partial_x + P(x), \quad f(x) = Q(x)$$

- suche die eine Grundlösung der homogenen Gleichung: y_1

$$\begin{aligned} y_1' + P y_1 = 0 &\leadsto \frac{y_1'}{y_1} = \partial_x \ln y_1 = -P \leadsto \ln y_1 = - \int_{x_0}^x dx' P(x') \leadsto \\ y_1(x) &= e^{-\int_{x_0}^x dx' P(x')} \end{aligned} \quad (7.4)$$

- fehlt : eine spezielle Lösung der inhomogenen Gl. : y_0

Trick : Funktionswechsel von y_0 nach u : $y_0(x) =: u(x) \cdot y_1(x)$

einsetzen : $u' y_1 + \underbrace{u y_1'}_{\rightarrow 0} + P u y_1 = Q$, aber $y_1' + P y_1 = 0$ *

$$\begin{aligned} \leadsto u' &= Q/y_1 \leadsto u(x) = \int_{x_1}^x dx' \frac{Q(x')}{y_1(x')} \leadsto \\ y_0(x) &= y_1(x) \cdot \int_{x_0}^x dx' \frac{Q(x')}{y_1(x')} \quad \text{inhomogene Lösung} \end{aligned} \quad (7.5)$$

Lösungsformel :

$$y(x) = y_0 + c_1 y_1 = e^{-\int_{x_1}^x dx' P(x')} \left(c_1 + \int_{x_0}^x dx' Q(x') e^{+\int_{x_1}^{x'} dx'' P(x'')} \right) \quad (7.6)$$

allg. :

Wahl neuer Funktionen ist vielseitig, bringt aber selten Vereinfachung

$$\text{z.B. } y = 1/u \leadsto y' = -u'/u^2 \leadsto -\frac{u'}{u^2} + \frac{P}{u} = Q \leadsto u' - Pu = -Qu^2$$

Benoulli-ODE ist nichtlinear \swarrow

⑤ Variation der Konstanten:

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = f(x)$$

allg. lin. ODE 2. Ordnung :

$$L_2 = \partial_x^2 + a\partial_x + b$$

homog. Gleichung hat 2 Grundlösungen: : \nexists allg. Lösungsmethode

falls (!) eine Grundlösung y_1 bekannt, dann gibt es Strategie :

neue Funktion u über : $y(x) =: u(x) \cdot y_1(x)$ [$c_1 \rightarrow u(x)$ „Var. der Konst.“]

also : $y' = y_1' u + y_1 u'$, $y'' = y_1'' u + 2y_1' u' + y_1 u''$

einsetzen :

$$y_1 u'' + 2y_1' u' + \underbrace{y_1'' u + ay_1' u + by_1 u}_{\rightarrow 0 \text{ wegen } L_2 y_1 = 0} = f$$

$$\leadsto y_1 u'' + (2y_1' + ay_1) \cdot u' = f \quad \text{keine } u\text{-Terme mehr!}$$

definiere $u' =: v \leadsto v' + \underbrace{\left(a + 2\frac{y_1'}{y_1}\right)}_{=P} \cdot v = \underbrace{\frac{f}{y_1}}_{=Q} \leadsto$ zurück zu ④ \checkmark

Bsp.:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = f(t) \quad \text{erlaubt} \quad x_1(t) = e^{i\omega t} \rightarrow x = e^{i\omega t} \cdot u(t) \xrightarrow{\text{einsetzen}}$$

$$e^{i\omega t} (\ddot{u} + 2i\omega \dot{u} - \cancel{\omega^2 u} + \cancel{\omega^2 u}) = f \xrightarrow{\dot{u}=v} \dot{v} + 2i\omega v = f e^{-i\omega t} \xrightarrow{(7.6)} v = \dots$$

$$x(t) = e^{i\omega t} \left[c_2 + \int_0^t dt' e^{-2i\omega t'} \left(c_1 + \int_0^{t'} dt'' f(t'') e^{-i\omega t''} \right) \right] \quad (7.7)$$

Bemerkungen

1) für $f \equiv 0$ (homogen) und y_1 bekannt:

$$v = e^{-\int_{x_1}^x dx' [a + 2\partial_{x'} \ln y_1]} = \left(\frac{y_1(x_1)}{y_1(x)} \right)^2 e^{-\int_{x_1}^x dx' a(x')} \leadsto y_2$$

2) für L_n statt L_2 und y_1 bekannt: dieses Vefahren reduziert $L_n \rightarrow L_{n-1}$

... ab jetzt nichtlinear ...

... ab jetzt nichtlinear ...

⑥ Trennung der Variablen:

$$y'(x) = f(x) \cdot g(y)$$

$$\text{lese ab } \frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \rightsquigarrow \frac{dy}{g(y)} = \underset{\text{nur } x}{f(x) dx} \rightsquigarrow$$

$$\begin{aligned} \int_{y(x_0)}^y \frac{dy'}{g(y')} &= \int_{x_0}^x dx' f(x') && \text{mit } F'(x) = f(x) \\ =: H(y) &=: F(x) + C && H'(y) = 1/g(y) \end{aligned} \quad (7.8)$$

← Stammfunktion

Lösungsformel:

$$y(x) = H^{-1}(F(x) + C) \quad (7.8')$$

⑦ Reduktion der Ordnung:

a) $y'' = f(y, y')$ x kommt nicht in f vor!

Trick: betrachte y' als Funktion von y :

$$y' =: p(y) \rightsquigarrow y'' = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = p' \cdot y' = p' \cdot p$$

einsetzen: $p' \cdot p = f(y, p)$ ODE 1. Ordnung für $p(y)$

falls gelöst, komme zurück zu $y(x)$ mit $y'(x) = p(y)$: Fall ⑥ ✓

b) $y'' = f(x, y')$ y kommt nicht in f vor!

Trick: nehme $y' =: u$ als neue Funktion $\rightsquigarrow u' = f(x, u)$ ODE 1. Ordng. ✓

c) $Ly = f$ mit $L = L_1 \cdot L_2$ Produktstruktur!

Trick: $L_1 L_2 y = L_1 u = f$ mit $L_2 y =: u$

\rightsquigarrow 2 ODEs 1. Ordnung: löse erst für u , dann für y ✓

⑧ Umwandlung in ODE-System:

ODE n-ter Ordnung \rightarrow System von n ODEs 1. Ordnung

$$y^{(n)} = f(y^{(n-1)}, \dots, y', y, x)$$

definiere:

$$\left. \begin{array}{l} y' =: u_1 \\ y'' =: u_2 \\ y''' =: u_3 \\ \vdots \\ y^{(n-1)} =: u_{n-1} \\ y^{(n)} =: f(\dots) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y' = u_1 \\ u'_1 = u_2 \\ u'_2 = u_3 \\ \vdots \\ u'_{n-2} = u_{n-1} \\ u'_{n-1} = f(u_{n-1}, \dots, u_1, y, x) \end{array} \right\}$$

falls linear, d.h. $f = a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y + a(x)$,

dann von Matrix-Form: $Y' = A \cdot Y + F$ mit

$$Y = \begin{bmatrix} y \\ u_1 \\ \dots \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ a \end{bmatrix} \quad (7.9)$$

dies ist matrixwertige Verallgemeinerung von ④ mit $P(x) \rightarrow A$ und $Q(x) \rightarrow F$

Illustration: $n = 2$ linear \curvearrowright allg. lineare ODE 2. Ordnung

$$\ddot{x} + a(t)\dot{x} + b(t)x = f(t) \quad \text{def.: } \dot{x} =: v$$

$$\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix} \leftrightarrow \dot{Y} = A(t) \cdot Y + F(t) \quad (7.10a)$$

erst die homog. Gl., d.h. $F = 0$.

Def.: Zeitentwicklungsmatrix $U(t, t_0)$

$$Y(t) = U(t, t_0) \cdot Y(t_0) \quad \text{für AW } Y(t_0) = Y_0 \quad (7.10b)$$

$$\text{ODE} \curvearrowright \dot{Y} = \dot{U}Y_0 \stackrel{*}{=} A \cdot UY_0 = AY \curvearrowright \dot{U} = A \cdot U \quad (7.10c)$$

AW: $U(t_0, t_0) = \mathbf{1}$

dann die inhomog. Gl., also $F \neq 0$.

Ansatz: $Y = U \cdot Z$ (Z statt Y_0 , „Variation der Konstanten“)

$$\begin{aligned} \text{ODE} \leadsto \dot{Y} &= \dot{U}Z + U\dot{Z} = \underbrace{A}_{\dot{U}Z} \dot{U}Z + U\dot{Z} \stackrel{*}{=} \underline{AY} + F \leadsto \\ U\dot{Z} &= F \leadsto \dot{Z} = U^{-1}F \leadsto Z(t) = Y_0 + \int_{t_0}^t dt' U(t', t_0)^{-1} F(t') \end{aligned}$$

Gesamtlösung:

$$Y(t) = U(t, t_0) \left[Y(t_0) + \int_{t_0}^t dt' U(t', t_0)^{-1} F(t') \right] \quad (7.10d)$$

Vorsicht:

$$\text{für } n = 1 \text{ ist } U(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^t dt' A(t')}$$

für $n > 1$ ist dies i.a. falsch, weil $[A(t_1), A(t_2)] \neq 0$

Im Spezialfall konstanter Koeffizienten, d.h. $A(t) = A = \text{konst.}$, ist Lösung möglich:

$$\begin{aligned} U(t, t_0) &= e^{(t-t_0) \cdot A} := \mathbf{1} + (t-t_0)A + \frac{1}{2!}(t-t_0)^2 A^2 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (t-t_0)^n A^n \end{aligned} \quad (7.11)$$

Bsp.:

$$\begin{aligned} A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \leadsto e^{tA} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2!} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{t^3}{3!} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \dots \\ &= \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \quad \text{Drehmatrix!} \end{aligned}$$

inhomog. Lsg. in diesem Fall:

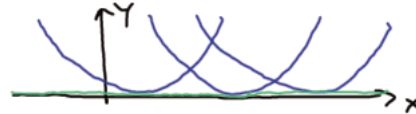
$$Y(t) = e^{(t-t_0)A} \left[Y(t_0) + \int_{t_0}^t dt' e^{-(t'-t_0)A} F(t') \right] \quad (7.12)$$

⑨ Singuläre Lösung:

$$(y')^2 = 4y \quad \text{für } y \geq 0$$

$$\leadsto y' = \pm 2\sqrt{y} \xrightarrow{\text{TdV}} \frac{y'}{2\sqrt{y}} = \partial_x \sqrt{y} = \pm 1 \leadsto \sqrt{y} = \pm(x+c)$$

$$\text{allg. Lsg.: } y_c(x) = (x-c)^2$$



zusätzlich: $y(x) \equiv 0$

$$\text{und auch stückeln: } y(x) = \left. \begin{cases} 0 & x < c \\ (x-c)^2 & x \geq c \end{cases} \right\} \text{„singulär“}$$

⑩ Greensche Funktion:

$$L_n y(x) = f(x) \quad f : \text{Ursache}, \quad y : \text{Antwort}$$

elementare Ursache: $f(x) = \delta(x - a)$

jeder f kann zusammengesetzt werden $f(x) = \int da \delta(x - a) f(a)$

Def.:

$$L_n G(x, a) = \delta(x - a) \tag{7.13}$$

Rekonstruktion von y zu f aus Kenntnis von G :

$$\begin{aligned} \int da f(a) L_n G(x, a) &= \int da f(a) \delta(x - a) \\ \parallel L_n \text{ linear} & \qquad \parallel \text{Def. von } \delta \\ L_n \underbrace{\int da f(a) G(x, a)} &= f(x) \end{aligned}$$

also:

$$y(x) = \int da G(x, a) f(a) \tag{7.14}$$

löst $L_n y = f$

formal: $G = L_n^{-1}$

Konstruktion von G ist möglich aus Lsgn. der homog. ODE

ENDE